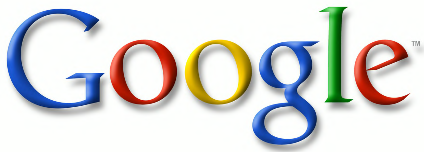



SIGILL: COLL: HARVARD: CANTAB: NOV: ANGL: 1650.
CHRISTO ET ECCLESIAE



LEÇONS NOUVELLES

SUR

L'ANALYSE INFINITÉSIMALE

ET SES

APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES.

LEÇONS NOUVELLES

SUR

L'ANALYSE INFINITÉSIMALE

ET SES

APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES

PAR

Charles

M. CH. MÉRAY,

PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE DIJON.

OUVRAGE HONORÉ D'UNE SOUSCRIPTION DU MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE.

PREMIÈRE PARTIE.

PRINCIPES GÉNÉRAUX.



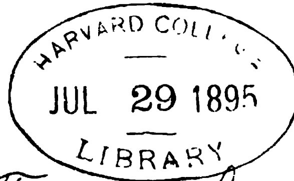
PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1894


HARVARD COLLEGE
JUL 29 1895
LIBRARY

A M. LIARD,

DIRECTEUR DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR.

A M. MARGOTTET,

MON EXCELLENT DOYEN,

A MM. P. BAILLY, C. COURCELLES, B. NIEWENGLOWSKI, E. ZIEGEL,

MES CHERS AMIS.

PRÉFACE.

Je reprends à un point de vue fort éloigné des idées ayant cours l'exposition de la partie des Mathématiques dont les noms d'Analyse infinitésimale, de Calcul différentiel et intégral rappellent certaines considérations fréquentes, certaines divisions convenues, mais dont l'objet véritable est l'*étude systématique des propriétés générales des fonctions*.

Jusqu'à nos jours, pour ainsi dire, cette immense théorie qui, après l'Algèbre, domine la science des grandeurs et par celle-ci presque tout ce qu'il y a de positif dans les connaissances humaines, n'a guère vécu cependant que de principes inexacts, précaires tout au moins, de démonstrations sans valeur, de conclusions douteuses, et la chose est d'autant plus surprenante que, tout en formulant sur des faits analytiques, en somme fort complexes, des affirmations dogmatiques dont les principales devaient un jour être reconnues erronées [1], tout en appuyant sur ces données des raisonnements réputés sérieux, mais dont la plupart ne résis-

---

[1] Depuis le moment où elle a commencé à prendre corps, jusqu'à une époque très récente, on a fait reposer toute la théorie des fonctions sur la proposition suivante. accompagnée quelquefois de démonstrations rudimentaires, plus souvent présentée comme évidente ou même sous-entendue : *quand une fonction est continue, son accroissement correspondant à un autre infiniment petit attribue à une de ses variables offre avec ce dernier un rapport qui, sauf exceptions insignifiantes, tend vers quelque même limite.* Or ceci était faux, puisqu'on a réussi postérieurement à former des fonctions continues pour lesquelles une semblable limite n'existe jamais. Le lecteur en trouvera des exemples nombreux, des exemples aussi de fonctions continues qui, sans dégénérer en des constantes, ne sont ni croissantes, ni décroissantes, etc., dans le beau travail de M. Darboux, *Mémoire sur les fonctions discontinues* (*Ann. sc. de l'Éc. Normale,* 2e série, t. IV, 1875). La première recherche de ce genre paraît être due à M. Weierstrass (*Cf.* H. Laurent, *Traité d'Analyse,* t. III, p. 412 ; 1888).

Bien d'autres propositions, fondamentales aussi dans les doctrines classiques, ne sont ni mieux assises, ni sans doute plus exactes :

Chaque dérivée d'une fonction continue (il s'agit de la prétendue limite ci-

tent pas à un examen tant soit peu attentif ([2]), les mêmes hommes trouvaient à peine assez rigoureuses les moindres considérations de la Géométrie élémentaire. La cause en est bien simple : n'ayant aucun égard aux propriétés positives assurées aux fonctions par les lois naturelles de leur génération analytique, on en a fait de purs êtres de raison ; apercevant seulement chez elles le caractère

---

dessus) *est une autre fonction des mêmes variables, qui est continue aussi, partant douée de dérivées.*

Pourvu que des fonctions continues seules aient été employées à la formation d'équations finies données, la résolution de ces dernières est généralement possible, et elle fournit de nouvelles fonctions, continues aussi et douées de dérivées par rapport à toutes les variables indépendantes de la question.

Etc.

Cette méthode consiste au fond à admettre n'importe quoi *jusqu'à preuve du contraire,* puis à marcher à l'aventure ; la proscription impitoyable et méritée dont elle est l'objet dans tout le reste des Mathématiques se lève pourtant au seuil de l'Analyse infinitésimale. Les *hypothèses* des sciences physiques ne sont aussi que des allégations sans preuves certaines et immédiates ; mais on insiste avec grand soin sur leur caractère essentiellement provisoire, et personne ainsi n'est abusé sur leur portée.

([2]) Tels sont ceux au moyen desquels on croit prouver : qu'*une fonction continue dégénère en une constante quand sa dérivée* (*définie comme limite de rapport*) *est identiquement nulle,* que *le résultat de différentiations différentes* (*toujours entendues de la même manière*) *est indépendant de l'ordre dans lequel on peut les exécuter,* etc.

Qu'on veuille ou non en convenir, de pareils procédés ne sont en réalité que l'omission de tout ce qui embarrasse. Prenons en particulier la démonstration classique de la série de Taylor ; elle commence par la construction pour la fonction proposée, d'un développement d'amplitude limitée mais variable, dont le dernier terme se met sous des formes diverses, puis on montre, en l'appliquant à des fonctions *choisies dont le nombre n'a jamais atteint* 10, que ce dernier terme, ou reste, tend vers 0 en s'éloignant indéfiniment. Laissant de côté la légitimité de ce développement dont je n'ai que faire, je remarque simplement que la discussion du reste en question devient impraticable en dehors de cette demi-douzaine d'exemples clichés, e^x, $\sin x$, $\cos x$, $l(1+x)$, $(1+x)^\mu$, ... dont quelques-uns au surplus se réduisent facilement les uns aux autres. A lui seul ce fait rendrait illusoire la démonstration précitée, et son évidence est telle, que je ne conçois pas comment il a pu échapper aussi longtemps à la critique.

C'est cependant par des raisonnements aussi insuffisants, que les jeunes gens ont toujours abordé l'étude de l'Analyse infinitésimale, et ce, au sortir d'un régime intellectuel où domine une rigueur parfois outrée. Tout d'abord ils s'efforcent de les ajuster et n'y réussissent pas, d'où les difficultés bien connues de cette première étude et la prétendue transcendance de son objet. De guerre lasse ils cessent bientôt de s'inquiéter des *principes,* pour ne plus s'intéresser qu'à leurs *applications ;* et c'est comme cela, non autrement, qu'ils parviennent à s'approprier les méthodes générales de calcul. Mais leur savoir reste plutôt empirique et mêlé de nuages qui ne se dissipent jamais.

le plus sensible des phénomènes physiques auxquels on rattachait presque exclusivement leur conception, on s'est plu à voir dans leur continuité habituelle un attribut primordial renfermant tous les autres; on a mis en conséquence une sorte de point d'honneur à faire de cette même continuité le support *unique* de tous les raisonnements ([3]). Cette méthode a été féconde en pétitions de principes, en paralogismes, en considérations rebutantes, en erreurs

([3]) C'est la première chose qui saute aux yeux quand on analyse l'enchaînement des idées dans les Ouvrages qui étaient classiques il y a une vingtaine d'années, et même dans de plus récents.

La stérilité de cette notion considérée comme raison suffisante de tous les faits analytiques est surabondamment établie par ces mille démonstrations fondées successivement sur elle en remplacement d'autres reconnues vicieuses après coup, démonstrations toutes proclamées parfaites un instant, puis abandonnées bientôt pour de nouvelles puisées à la même source et vouées au même sort (celles de la formule de Taylor sont déjà nombreuses, et pourtant elles n'ont pas encore réussi à contenter tout le monde). Elle l'a été plus directement par ces démentis éclatants et inattendus, infligés à quelques-unes des prétendues propriétés fondamentales des fonctions continues [*voir* note ([1])]; d'ailleurs elle se manifestait de tout temps par le manque absolu de rigueur qui se fait sentir dans toutes les démonstrations dès qu'on veut en percer la surface, même par leur caractère spécial, invariablement aride, trop souvent puéril. Néanmoins le rôle de la continuité dans les publications doctrinales est encore très grand; il commence heureusement à s'amoindrir.

Cauchy, dont des idées neuves et profondes devaient provoquer un jour des modifications sans précédents dans la conception des faits analytiques, n'a jamais cherché non plus qu'à rattacher exclusivement à la continuité toutes les autres propriétés des fonctions; il le déclare lui-même de la manière la plus formelle. Refaisant la démonstration de son théorème favori sur le développement des fonctions en séries, il commence par cette phrase dont je grossis les mots caractéristiques : « Parmi les théorèmes nouveaux ... L'UN DES PLUS SINGULIERS ... est celui » qui donne immédiatement les règles de la convergence des séries fournies par » le développement des fonctions explicites et RÉDUIT SIMPLEMENT LA LOI DE CONVERGENCE A LA LOI DE CONTINUITÉ, la définition des fonctions continues ... » (étant) ... celle ... suivant laquelle une fonction est continue entre des limites » données de la variable, lorsque, entre ces limites, elle conserve constamment une » valeur finie et déterminée, et qu'à un accroissement infiniment petit de la » variable correspond un accroissement infiniment petit de la fonction elle-même. » Comme .... » (*Exercices d'An. et de Ph. mathématique*, t. I, p. 269; 1840. (Dans ce Mémoire, intitulé : *Considérations nouvelles sur la théorie des suites et sur les lois de leur convergence*, on trouve, à la page 276, l'énoncé du théorème en question, qui n'est pas encore exact; effectivement la fonction x^{μ} en remplit toutes les conditions, pour μ réel, positif et > 1, et cependant elle n'est jamais développable par la formule de Maclaurin quand μ n'est pas un entier, ce qui est contraire au dispositif.)

On lui a attribué, sur l'enchaînement des grands faits analytiques, des idées générales analogues à celles de Lagrange [*voir* note ([4]) *inf.*], auxquelles sont con-

même, et bien certainement elle n'aurait pas conduit aux résultats exacts dont cette branche de l'Analyse s'est incessamment grossie, si le crible des applications particulières n'eût travaillé souvent à l'élimination du faux ([4]), si, sans qu'on s'en doutât, d'autres

---

formes dans leur essence toutes les méthodes que je développe dans cet Ouvrage. Il en a effectivement passé très près, car, à la page 47 de son *Résumé d'un Mémoire sur la Mécanique céleste et sur un nouveau calcul appelé Calcul des limites* (imprimé dans les *Exercices d'An. et de Ph. mathématique*, t. II, 1841, ayant été lu à l'Académie des Sciences de Turin dans la séance du 11 octobre 1831), on trouve des énoncés où il fait intervenir, pour les premiers membres des équations génératrices de nouvelles fonctions, la possibilité d'être développés par la série de Taylor. Mais ce n'est pas l'*existence* des fonctions engendrées, ni même la convergence de leurs développements, qu'il entend déduire de cette possibilité; c'est une simple vérification *supplémentaire* de l'aptitude de ces développements, *s'ils sont convergents d'autre part*, à satisfaire aux équations génératrices, quand la possibilité en question existe pour elles. Autrement, chacun de ces trois énoncés ne contiendrait pas les mots suivants, répétés avec une insistance si marquée : « ... La somme de cette série REPRÉSENTERA la fonction u, si la valeur de x est » tellement choisie que, LA SÉRIE ÉTANT CONVERGENTE, ... » La convergence de la série représentant ainsi la fonction u, Cauchy a toujours voulu la déduire de la continuité, etc., c'est-à-dire de propriétés selon lui infiniment plus simples, en tous cas *absolument étrangères à l'origine analytique spéciale de cette fonction u*. C'est ce que prouve en particulier, et cela jusqu'à l'évidence, le Mémoire de 1840 cité avant celui-ci; *écrit neuf ans après la communication faite à l'Académie de Turin, il ne contient aucune référence à ces trois énoncés*. Au surplus, Cauchy lui-même n'a jamais attaché aux mêmes propositions une importance comparable à celle qu'avait à ses yeux son théorème « réduisant simplement la loi de convergence à la loi de continuité »; effectivement il a vécu seize années encore pendant lesquelles il n'a cessé d'écrire, de remanier beaucoup de ses productions, et cependant il n'y a fait à ma connaissance aucune allusion. Dans le sens que je leur conteste, ces énoncés auraient une importance considérable, et, à défaut de Cauchy, ses commentateurs si nombreux, la plupart si enthousiastes, les auraient tout au moins remarqués. Or aucun d'eux ne l'a fait que je sache; tous leurs travaux au contraire sont conçus dans un esprit diamétralement opposé, ceux en particulier de Riemann qui jouissent en ce moment d'une très grande faveur. C'est plus de trente ans après la mort de Cauchy que l'on s'est avisé de lui prêter les idées dont il s'agit. Plus loin (p. XXIII) je reviendrai sur ce point, à propos de ce que M. Poincaré en a dit.

A la continuité, Cauchy a sans doute ajouté les notions les plus fécondes (valeurs imaginaires des variables et des fonctions, lemme fondamental du *Calcul des limites*, fonctions non monodromes, etc.), mais en les rattachant toutes à celle-ci plus ou moins étroitement; de là principalement provient l'obscurité qu'elles ont toujours conservée et que les travaux procédant des vues de Riemann n'ont, selon moi, pas du tout dissipée.

([4]) L'histoire de l'Analyse infinitésimale en fournit des exemples variés, parmi lesquels celui que j'ai rapporté dans la note ([1]) est frappant.

L'énoncé suivant, qui se confond pour ainsi dire avec le second de ceux cités

propriétés des fonctions analytiques n'eussent suppléé habituellement à l'insuffisance de la continuité. Mais on commence à convenir de son impuissance, ce qui me dispense de faire cette critique d'une manière moins sommaire.

L'aspect que l'Analyse infinitésimale offrait ainsi, il y a un peu plus d'un quart de siècle, a été modifié profondément à la longue par les recherches entreprises pour élucider et développer les nouveautés de Cauchy, pour se rectifier les uns les autres, par celles aussi, jusqu'à un certain point connexes, dont le Mémoire de M. Darboux nous offre un brillant spécimen [*voir* note (1)]. Rares et négligés d'abord, très nombreux ensuite, quelquefois très remarqués, ces travaux ont eu des tendances bien diverses dont se sont dégagées néanmoins plusieurs idées générales en très grand crédit actuellement. La première, restant en cela conforme aux traditions antérieures, consiste à voir toujours dans les fonctions des objets préexistant aux calculs d'où naissent tantôt l'une, tantôt l'autre, en conséquence à raisonner sur elles après attribution, faite *a priori*, de propriétés réputées dominantes et très simples; seulement le premier rôle n'appartient plus à la continuité, et les propriétés en question, suivant qu'elles sont accordées ou refusées aux fonctions, les font dire *analytiques* ou bien *non analytiques* (en fait, les premières sont celles qui se rencontrent partout, les autres sont de fantaisie). Le trait essentiel du carac-

au commencement de la note (2), a été formulé, employé avec la même confiance, fondé sur une démonstration réputée non moins bonne : *La possibilité de chaque intégration indéfinie* (*rattachée comme toujours à la continuité*) *entraîne la formule*

$$\int_{y_0}^{Y} dy \int_{x_0}^{X} f(x, y)\, dx = \int_{x_0}^{X} dx \int_{y_0}^{Y} f(x, y)\, dy.$$

Il n'en est pas moins caduc dans bien des circonstances, et c'est l'*expérience* seule qui a révélé ces inexactitudes.

De même exactement pour cet autre théorème démontré catégoriquement à la p. 131 de l'Ouvrage de Cauchy intitulé *Cours d'Analyse de l'École royale polytechnique* et publié en 1821 : « *Lorsque les différents termes d'une série sont* » *des fonctions d'une même variable x, continues par rapport à cette variable* » *dans le voisinage d'une valeur particulière pour laquelle la série est con-* » *vergente, la somme s de la série est aussi, dans le voisinage de cette valeur* » *particulière, fonction continue de x* ». On en a rectifié l'énoncé et la démonstration, mais seulement *après* l'avoir trouvé *expérimentalement* en défaut dans des cas du genre de ceux rapportés au n° 127 de ce Volume. Etc.

tère *analytique* d'une fonction (il entraîne immédiatement sa continuité) consiste dans la *possession constante de dérivées*, celles-ci étant toujours définies comme limites éventuelles des rapports formés avec des accroissements infiniment petits attribués successivement à chacune des variables considérée isolément et avec les accroissements correspondants de la fonction. L'extension de cette notion aux fonctions de variables imaginaires, pour lesquelles on a conservé mot pour mot les définitions de Cauchy, exige une distinction analogue à celle qu'il a dû faire, non identique toutefois au point de vue doctrinal. D'après Cauchy, une fonction $f(z)$ de la variable imaginaire $z = x + \sqrt{-1}y$ est toute quantité de la forme $f(z) = X(x, y) + \sqrt{-1}\,Y(x, y)$, où $X(x, y)$, $Y(x, y)$ représentent des fonctions ordinaires quelconques des variables réelles x, y; et, quand les accroissements Δx, Δy, tous deux infiniment petits, sont assujettis seulement à fournir un rapport tendant vers une limite donnée quelconque λ (ou bien infini), quand avec cela les fonctions $X(x, y)$, $Y(x, y)$ sont toutes deux continues, il ne doutait pas, pour le rapport

$$\frac{\Delta f(z)}{\Delta z} = \frac{\Delta X(x, y) + \sqrt{-1}\,\Delta Y(x, y)}{\Delta x + \sqrt{-1}\,y},$$

de l'existence habituelle d'une limite Λ_λ dont la valeur dépend de celle de λ presque toujours. Ceci fait, il dit que la fonction $f(z)$ est *monogène* quand par hasard il arrive que cette dépendance n'existe jamais, puis naturellement il appelle cette valeur de Λ_λ, unique pour chaque valeur de z, la valeur correspondante de la dérivée $f'(z)$. Actuellement, les idées et les mots sont les mêmes, à cela près que, préalablement à tout, on *impose* au rapport $\frac{\Delta f(z)}{\Delta z}$ la condition, assurée, selon Cauchy, par la simple continuité des fonctions X, Y, d'avoir pour toute valeur donnée de λ, quelque limite variant ou non avec cette quantité. On s'engage ensuite dans la détermination des propriétés générales à assigner aux mêmes fonctions X, Y, pour que leur association puisse fournir la partie réelle et le coefficient de $\sqrt{-1}$ dans la valeur de quelque fonction monogène au nouveau sens du mot, ce qui conduit à certaines équations aux dérivées partielles, dont une étudiée avec

prédilection sous le nom d'*équation de Laplace;* on se livre à des recherches épisodiques sur le *Principe de Dirichlet,* le *Problème intérieur* ou *extérieur,* la *Représentation conforme,* ....., à des digressions sur les fonctions continues, discontinues, *intégrables, non intégrables,* ..... ([5]); enfin les théories vitales sont présentées ou reprises, étayées par divers résultats de toutes ces investigations.

Ces apprêts excessifs, faisant un tel contraste avec les négligences d'autrefois, sonnent cependant toujours faux. Les fonctions discontinues, sans dérivées, non intégrables, etc., *ne se rencontrent que dans des dissertations métaphysiques* ([6]); il est donc bien inutile de s'inquiéter d'elles. Il n'est pas moins oiseux de parler aussi longuement de la monogénéité, puisque aucune fonction digne d'un regard ne s'est encore présentée par sa partie réelle et son coefficient de $\sqrt{-1}$ séparés l'un de l'autre ([7]). Par ces ren-

---

([5]) Malgré leur aridité, les considérations de ce genre occupent maintenant une place plus ou moins étendue dans la plupart des Ouvrages classiques.

([6]) Les travaux qui ont ces fonctions pour objectif se trouvent voués ainsi à une stérilité absolue, en dépit de tout le talent qui y a été dépensé. C'est une véritable perte de force vive intellectuelle; comme la caducité générale des principes traditionnels de l'Analyse infinitésimale pour une bonne part, on doit l'imputer aux définitions factices des dérivées et des intégrales définies, auxquelles on s'attache toujours avec la même persistance. En Analyse pure cependant, cela bien entendu en dehors des premiers développements de ces définitions voulues, il est très rare qu'une dérivée se rencontre comme limite d'un rapport, une intégrale définie comme limite d'une somme. Et même il faut abandonner totalement le premier point de vue, dès qu'on veut, par exemple, apprécier le degré d'indétermination des fonctions intégrales d'équations différentielles données, concevoir seulement leur existence; il faut également abandonner le dernier, aussitôt qu'il s'agit de calculer, de combiner ensemble des intégrales définies ou indéfinies. Dans les applications géométriques et autres, ces définitions ont pris des airs de nécessité qui sans doute maintiennent leur crédit, malgré leur grave incommodité, qui ont pu contribuer à les faire adopter; mais là aussi il est avantageux et bien facile de recourir à d'autres intuitions, ce que la quatrième Partie de cet Ouvrage montrera amplement. Quand on veut mesurer les grandeurs physiques (longueurs et aires courbes, volumes, etc.), on est bien conduit à *certaines* intégrales définies, par des limites de sommes. Mais quelques applications de l'Analyse ne sont pas l'Analyse; trouve-t-on dans celles-ci de pareilles représentations pour les intégrales de différentielles totales à *plusieurs* variables?

Tout cela frapperait les yeux, si seulement on voulait bien les diriger sur ce point.

([7]) Cette simple observation montre le peu de valeur de la définition à laquelle on s'est arrêté pour les fonctions imaginaires d'après Cauchy, l'inanité, si je puis dire, de leur théorie assise sur les idées doctrinales de Riemann et leurs accessoires si pesants. A Cauchy inventeur, elle pouvait échapper; mais cette inad-

forts ajoutés à si grands frais, on croit avoir réussi cette fois à donner une rigueur absolue aux nouveaux raisonnements; dans leur bizarrerie, dans leurs détours compliqués, je trouve plutôt la preuve certaine d'un mauvais choix du point de départ ([8]). Pour tout dire, je leur préférerais encore, et de beaucoup, ce que Briot et Bouquet avaient fait des idées principales de Cauchy; il y restait assurément des points faibles, mais au moins tout y était simple et facile, rien n'y était torturé.

Mon point de vue est tout autre; déjà Lagrange l'avait nettement aperçu dans sa consistance générale ([9]), et Abel, en s'y pla-

vertance est moins explicable de la part de Riemann écrivant à une époque où le maniement des fonctions imaginaires était devenu une opération courante.

([8]) *A priori*, il n'est pas possible que ce matériel formidable soit, comme on paraît le croire, l'instrument nécessaire à l'étude de la moindre fonction. A cause de cela et aussi parce que je me garde de tout emprunt aux raisonnements dont il s'agit, je juge inutile d'en faire un examen attentif; je n'en ai pas moins la persuasion qu'en les étudiant de près, on y découvrirait bientôt des points faibles dont on ne pourrait opérer la consolidation sans sortir de cet ordre d'idées.

([9]) Sur l'édition de 1813, on voit Lagrange compléter le titre de sa « *Théorie » des fonctions* » par l'épithète « *analytiques* » et par cette mention : « contenant » les principes du *Calcul différentiel, dégagés de toute considération d'infini- » ment petits, d'évanouissants, de limites et de fluxions,* et RÉDUITS A L'ANA- » LYSE ALGÉBRIQUE DES QUANTITÉS FINIES ». L'Introduction commence par cette phrase : « On appelle *fonction* d'une ou plusieurs quantités TOUTE EXPRESSION DE » CALCUL dans laquelle ces quantités entrent d'une manière quelconque...»; plus loin (p. 5) elle contient ce passage caractéristique : « Dans un Mémoire imprimé » parmi ceux de l'Académie de Berlin en 1772... j'avançai que LA THÉORIE DU » DÉVELOPPEMENT DES FONCTIONS EN SÉRIE CONTENAIT LES VRAIS PRINCIPES DU » CALCUL DIFFÉRENTIEL...». Dès les premières lignes de cet Ouvrage, comme aussi dans ses *Leçons sur le Calcul des fonctions*, Lagrange donne effectivement un corps à cette idée en employant *exclusivement* les séries à la génération des dérivées des fonctions, ainsi qu'à leur combinaison.

La pensée de Lagrange se manifeste avec la dernière clarté : contrairement à ce que l'on s'est toujours plu à prétendre, les fonctions sont, non pas des êtres de raison à considérer indépendamment de leur origine positive, mais bien des objets *analytiques*, des *résultats de calculs,* à traiter comme la première venue des expressions algébriques; ce n'est pas la continuité (fluxions, etc.) qui peut fournir les vrais principes, c'est l'*analyse algébrique des quantités finies,* en d'autres termes, l'analyse courante. Finalement, les dérivées ne doivent pas être considérées comme des limites de rapports; c'est *dans les séries* qu'il faut tout à la fois chercher leur définition, et des moyens de démonstration pour les propositions les concernant.

Cette intuition est pour moi un véritable trait de génie, formulée avec tant de précision, tant de hardiesse, à une époque où l'on ignorait jusqu'à la règle de

çant à sa manière, avait pu donner la première théorie solide qui ait existé en Analyse infinitésimale ([10]). Dans toutes les spéculations analytiques ayant eu un autre but que la satisfaction d'une curiosité stérile, et aux termes mêmes de la définition de Lagrange [*voir* note ([9])], les fonctions se sont invariablement présentées comme « *expressions de calcul* », caractère dont les observations suivantes complètent la spécification. D'abord les calculs en question, si compliqués qu'ils soient, se réduisent toujours à des combinaisons variées de deux opérations fondamentales seulement, savoir : la *Composition des fonctions* et l'*Intégration des équations différentielles* (j'omets la *résolution d'équations finies,* parce qu'elle se ramène immédiatement à des intégrations; je passe également sous silence quelques développements spéciaux que l'on rencontre dans les monographies, mais qui sont en nombre fort petit et qui se traitent par les mêmes moyens exactement). Enfin, chacun de ces calculs n'implique jamais, comme fonctions données, que des *polynômes entiers* et des fonctions engendrées *à partir d'eux* par quelque enchaînement des opérations dont il s'agit. Cela étant, il suffit de rendre libre cours aux conséquences de cette filiation spéciale pour arriver avec la dernière rigueur à la certitude que toutes les fonctions analytiques possèdent la propriété commune devinée par Lagrange (*loc. cit.*) *d'être toujours*

---

convergence des séries entières. On sait qu'elle est restée lettre morte; cependant Lagrange était alors au point culminant de sa glorieuse carrière, ayant fourni mille preuves que la sûreté de son vigoureux esprit égalait sa profondeur et sa tranquille fécondité.

([10]) Dans son Mémoire *Recherche sur la série* $1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m-1)}{1.2}x^2+\ldots$ (*Journal de Crelle*, t. I, 1826), Abel commence par déclarer vicieuses toutes les démonstrations connues de la formule du Binôme pour un exposant non entier positif; puis il les remplace en rompant magistralement avec une routine dont il reste trop de vestiges. Considérant *en elles-mêmes* la série en question et toutes celles du même genre (dites *entières* aujourd'hui), il assigne les conditions générales de leur convergence, vérifie qu'entre ces limites elles se combinent comme de simples polynômes, et trouve ainsi à celle du Binôme, des propriétés spéciales assurant l'égalité de sa somme à la valeur de la fonction à développer.

Cette pièce est empreinte de la puissance, de l'originalité, de la pondération en même temps, qui distinguent les productions d'Abel; longtemps après sa publication on s'est aperçu qu'elle contenait les fondements naturels de la théorie des séries entières; mais cela n'a rien changé aux idées favorites sur la formule du Binôme, idées consistant à la déduire de celle de Taylor entendue tantôt comme je le rappelais dans la note ([2]), tantôt comme on l'a fait depuis Cauchy.

développables en séries entières, autrement dit par la formule de Taylor, sauf dans des cas exceptionnels dont la détermination se fait a priori. Substituant cette propriété générale à la continuité, à la monogénéité, etc., je la choisis pour base unique de tous les raisonnements, et, comme ceux qui servent à l'établir, ils prennent aussitôt la solidité et la facilité des démonstrations les plus élémentaires de l'Arithmétique et de l'Algèbre.

Par leur simplicité même, ces idées choqueront plus d'un lecteur; on les trouvera moins étranges peut-être quand j'aurai raconté comment j'y suis arrivé. Ayant toujours été frappé de l'aisance des énoncés et du raisonnement dans la *Théorie des fonctions doublement périodiques* de Briot et Bouquet, Ouvrage publié en 1859 et montrant ces qualités d'une manière soutenue pour la première fois ([11]), j'ai tenu à en faire bénéficier l'enseignement dont j'ai été chargé à Dijon, où je professe encore, à la fin de 1867, époque où ces nouveautés étaient fort peu goûtées. Mais auparavant j'ai voulu aussi donner aux démonstrations fondamentales la rigueur qui leur manquait, sans laquelle il faut convenir que rien n'est bon en Mathématiques. Mes principales réflexions se portèrent sur le théorème « singulier » de Cauchy, celui qu'il croyait « réduire simplement la loi de convergence à la » loi de continuité » [*voir* note ([3])], théorème que Briot et Bouquet avaient creusé avec une persévérance extraordinaire. Pour les conditions expresses que la fonction à développer doit remplir, ils se sont arrêtés à quatre seulement, savoir celles d'être *finie, continue, monodrome et monogène,* que l'on retrouve, sous telles ou telles autres dénominations, dans toutes les publications postérieures, les miennes exceptées. Pour chaque nouvelle fonction à développer, par exemple pour l'intégrale d'une équation différentielle donnée, il ne restait plus ainsi qu'à constater préalablement la possession de ces quatre propriétés fondamentales. Or, bien loin d'opérer cette constatation *en détail,* de recourir, pour la monogénéité par exemple, aux équations aux dérivés partielles,

---

([11]) « La simplicité et l'uniformité des raisonnements font de cette théorie une » des plus attrayantes et des plus parfaites de l'Analyse mathématique » (E. PICARD, *Traité d'Analyse,* t. II, p. 7, 1892). Une Note ajoutée par M. Picard montre qu'il avait principalement en vue l'Ouvrage dont je parle.

caractérisant la partie réelle et le coefficient de $\sqrt{-1}$ dans la valeur de la fonction disloquée en ces deux éléments, Briot et Bouquet procédaient comme il suit : *sans aucune intervention de ces équations aux dérivées partielles,* ils démontraient (ceci rigoureusement) que la somme d'une série entière est une fonction monogène de la variable, puis, combinant cette remarque avec un autre théorème de Cauchy affirmant (d'une manière bien moins précise) pour l'intégrale de l'équation différentielle considérée, la possibilité d'être représentée par une série entière dont la convergence a lieu *dans le voisinage immédiat seulement des valeurs initiales,* ils concluaient que cette intégrale était *monogène,* en outre pour la même raison *finie, continue,* etc., partant justiciable de théorème « singulier » de Cauchy. *La monogénéité et le surplus n'étaient donc, en fait, que certaines considérations interposées d'une manière essentiellement transitoire entre la convergence, d'abord très étroite, d'une série entière, et la convergence d'amplitude maximum de la même série.* Cette observation faite, la pensée m'est venue aussitôt de supprimer ces notions parasites de continuité, monogénéité, etc., et de chercher des moyens directs pour opérer *sans elles* le rattachement mutuel de ces deux sortes de convergence. J'ai réussi à les découvrir dans la simple transformation des séries, appuyée sur un lemme fondamental de Cauchy, entendu toutefois et établi d'une manière différente, en rompant définitivement avec ces intégrations monotones sur des cercles (c'est le théorème du n° 201 de ce Volume). La justesse de mes présomptions ayant été confirmée par le succès de cette démonstration, j'ai entrepris au même point de vue la refonte des principes de la théorie des fonctions; c'est ce qu'on va lire.

De cette manière, la continuité devient pour toute fonction ce qu'elle est pour les polynômes entiers, une propriété très secondaire. Les dérivées se définissent, se calculent, s'entremêlent dans les expressions différentielles comme Lagrange le voulait, c'est-à-dire par le simple jeu des opérations vulgaires de l'Algèbre, et la certitude de leur existence devenue tangible dispense de toute restriction à leur égard. Il n'y a donc plus à se préoccuper des fonctions discontinues, sans dérivées, non intégrables, ni de l'équation de Laplace, du *Principe de Dirichlet,* etc., et le mot *monogène* devient si complètement inutile que je n'ai pas à le

prononcer une seule fois. En même temps, se trouve expliqué de lui-même le caractère *exclusivement algébrique* de toutes les formules de l'Analyse infinitésimale, que la conception traditionnelle des fonctions laisserait à l'état d'énigme indéchiffrable.

Tout à l'heure je disais qu'en procédant ainsi on rendait les raisonnements sûrs et faciles. Je puis ajouter qu'ils se modèlent exactement sur ceux dont on peut se contenter quand, au lieu de fonctions quelconques, il s'agit de simples polynômes entiers; il en résulte pour toute la théorie des fonctions une grande uniformité et une ressemblance frappante avec l'Algèbre pure. A ces avantages s'en joint un autre que je ne juge pas moins précieux en théorie : c'est d'expliquer, en le légitimant *a priori*, le rôle imposant que les quantités imaginaires sont arrivées à jouer dans des questions réputées étrangères à l'Algèbre proprement dite. La conception de Cauchy, toujours en faveur, consiste à voir dans une fonction imaginaire, un accouplement *fortuit* de deux fonctions réelles des quantités, réelles aussi, qui avaient été accouplées dans les variables. Elle n'en est pas moins artificielle et incommode, témoin en particulier les développements que Riemann et son école en ont fait sortir. Les quantités imaginaires s'imposent en Algèbre, uniquement parce qu'elles permettent la décomposition complète en facteurs linéaires de tout polynôme entier à une seule variable, qu'ainsi elles laissent libre jeu aux artifices sans nombre dont cette décomposition est la base; elles s'imposent donc aussi bien en Analyse générale, puisque toute fonction méritant attention est représentable par une série entière, limite de quelque polynôme, qu'elle naît d'un calcul algébrique, que par suite il suffit de rendre imaginaires les valeurs des variables ou des constantes du calcul, pour obtenir la valeur correspondante de la fonction, *sans le plus léger changement dans sa conception originaire*.

Et même ce mot « s'impose » est beaucoup trop absolu; il est effectivement digne de remarque que, sauf de très légères modifications dans le vocabulaire, *les mêmes moyens exactement*, c'est-à-dire la prise en considération systématique de la possibilité pour toute fonction analytique d'être développée en une série entière, permettraient de faire aussi solide, aussi bien appropriée aux applications, la théorie complète des fonctions réelles de va-

riables réelles exclusivement aussi. A cela on ne perdrait que la connaissance *a priori* des limites extrêmes de la convergence de chaque développement. Mais pour la théorie, tant soit peu pour la pratique encore, ce serait une perte considérable, sans compensation, et, pas plus en Analyse générale qu'en Algèbre pure, on ne peut songer désormais à dénier aux quantités imaginaires un droit de cité gagné par de brillants services.

Des considérations d'un ordre tout autre justifient encore la théorie des fonctions basée sur les séries, et pourront la recommander à l'attention même des hommes de science qu'intéressent plutôt les applications des Mathématiques. Sauf peut-être dans quelques spéculations de la haute Physique analytique, aucune de ces fonctions sans dérivées, etc., n'a jusqu'ici représenté un phénomène naturel. Ceux-ci au contraire se sont toujours pliés à des formules construites soit exactement avec des fonctions obéissant à la loi de Lagrange, soit imparfaitement avec de pareilles fonctions ou plus souvent avec de simples polynômes dont, par l'adjonction seulement de quelques termes, on a pu rendre l'adaptation aux résultats des observations aussi parfaite que nos sens l'exigeaient. Or ces polynômes ne sont évidemment que les groupes des premiers termes dans des séries entières dont les sommes fourniraient rigoureusement les lois mathématiques des phénomènes. D'où cette conséquence vérifiée par l'exactitude expérimentale des mille formules que les physiciens ont découvertes en l'admettant : *Tout phénomène naturel est représentable exactement par des séries entières, approximativement par leurs premiers termes dont des observations de plus en plus précises fournissent empiriquement les coefficients dans l'ordre même où l'Analyse les range.* Ma théorie des fonctions revêt donc *naturellement* la forme qui convient aux recherches expérimentales, et la coïncidence est expliquée d'avance par ce que j'ai dit plus haut sur la génération successive des *vraies* fonctions à partir des calculs vulgaires, éléments inéluctables de toute mesure, de toute spéculation scientifique.

Avant d'entrer en matière, j'ai des devoirs bien agréables à remplir : celui d'offrir tout d'abord à M. Liard, le chef éminent de notre Enseignement supérieur, les vifs remercîments que je

dois à l'Administration de l'Instruction publique pour le haut encouragement accordé à ma publication, celui de remercier ensuite MM. Gauthier-Villars et fils qui ont fait à cette nouveauté l'honneur de lui prêter leurs admirables presses, de remercier en même temps deux de mes plus chers élèves, M. l'abbé Boudier, professeur à l'École Saint-François de Sales à Dijon, et M. Brice Collin, professeur agrégé au Lycée de Nantes, qui n'ont pas reculé devant la pénible tâche de travailler encore avec moi pour écarter de ces volumes des fautes de tous genres. Dans l'expression de ma reconnaissance, je ne dois pas oublier non plus M. Duport, mon excellent collègue, qui a bien voulu se charger de diriger l'impression s'il me devenait impossible d'en porter le fardeau jusqu'au bout.

Je demande maintenant la permission de rappeler certaines dates, de présenter quelques observations au sujet de diverses appréciations qui intéressent directement ou indirectement mes publications antérieures sur les questions traitées dans cet Ouvrage. Mais plus d'une erreur pourra m'échapper à cause de l'insuffisance de mes lectures; elle seule, avec le manque d'espace, m'a fait renoncer à essayer de faire la part revenant à chacun dans la découverte des faits que j'expose. On voudra donc bien considérer ce que je vais dire comme l'expression de ce que je *suppose* vrai, et non comme des affirmations dont l'exactitude serait certaine.

Les propositions fondamentales de ma théorie des fonctions, nouvelles par la forme et les moyens de démonstrations, nouvelles aussi, mais en partie seulement, par le fond, ont été l'objet d'une communication verbale faite par moi en avril 1868 au Congrès des Sociétés savantes à Paris, et d'une Note publiée aussitôt dans la *Revue des Sociétés savantes* (*Sciences mathématiques, physiques et naturelles*, t. III, année 1868, p. 37 et p. 133) sous le titre : *Remarques nouvelles sur les points fondamentaux du Calcul infinitésimal et sur la théorie du développement des fonctions en séries*. Elles ont été développées et complétées par beaucoup d'autres dans mon *Nouveau Précis d'Analyse infinitésimale*, publié en juillet 1872, qui peut être considéré comme une ébauche du présent Ouvrage. Depuis la rentrée scolaire de 1869, mes leçons publiques n'ont été que l'exposition du contenu de ce petit livre, et de ce que j'y ai successivement ajouté en m'attachant de plus en plus à cette manière de voir. Actuellement j'y fais entrer presque textuellement toutes les parties du présent Ouvrage qui n'exigent pas une dépense de temps disproportionnée à leur utilité pour les candidats à la Licence.

Dans le *Bulletin des Sciences mathématiques* (t. III, p. 265; 1872)

M. Bouquet a écrit : « J'ai reconnu depuis longtemps que la méthode dont » nous nous sommes servis, M. Briot et moi, pour démontrer l'existence des intégrales synectiques d'un système d'équations différentielles » simultanées, est encore applicable avec quelques modifications, dans » le cas d'un système d'équations différentielles totales. L'énoncé de cette » proposition a été communiqué à diverses personnes et en particulier à M. Méray; la publication du *Précis d'Analyse* me montre que » l'auteur n'a pas conservé le souvenir de notre entretien. Voici la démonstration.... »

Il ne s'était passé que ceci : un jour ou deux avant sa communication au Congrès des Sociétés savantes, j'avais soumis à M. Briot la Note d'avril 1868 dont je parlais à l'instant et qui contient l'énoncé du théorème en question. M. Briot me dit aussitôt : « Bouquet a déjà trouvé cela; ce sont les singularités des intégrales qui nous échappent », et vraisemblablement M. Bouquet m'aura confirmé ensuite la même chose. Mais au moment où j'apportais ainsi l'énoncé de ce théorème, M. Bouquet n'avait encore rien publié; auparavant j'ignorais complètement qu'il s'en fût occupé, et j'en possédais bien entendu la démonstration, celle qu'on peut lire à la page 143 de mon *Nouveau Précis*. Par le choix spécial de la fonction auxiliaire que l'ensemble de ma théorie m'imposait, elle diffère essentiellement de celle de M. Bouquet publiée à la suite de sa réclamation, *plusieurs années* après ma Note, *plusieurs mois* après mon livre. Au surplus, l'existence des intégrales en question n'étant que l'une de ces mille vérités banales, considérées comme évidentes dans l'ancienne Analyse, la simple *communication de l'énoncé* dont je parle ne pouvait mettre personne sur la voie de la *démonstration* qui, *seule,* était intéressante à connaître. M. Bouquet a trouvé la sienne de son côté, je n'en ai jamais douté, mais il reconnaît implicitement qu'*elle, il ne me l'a pas communiquée.*

On voit ainsi que M. Bouquet n'a pu m'aider à découvrir rien de ce théorème, et que j'en ai tout publié avant lui. Je l'ai rappelé sur-le-champ à cet homme éminent dont je possède encore la réponse amicale; mais il m'avait honoré de ses bontés, et je n'ai pas voulu rendre ma protestation publique. On voit encore l'erreur des auteurs qui ont attribué ce théorème à M. Bouquet exclusivement (H. Laurent, *Traité d'Analyse,* t. VI, p. 121, 1890. — C. Bourlet, *Thèse,* 1891, etc.) On le retrouvera démontré tout autrement au n° 301 du présent Volume.

Dans la deuxième édition de leur *Théorie des fonctions elliptiques,* p. 336, 1875, MM. Briot et Bouquet ne nomment personne à propos de la réduction de la théorie des fonctions implicites à celle des fonctions intégrales d'un système d'équations différentielles totales auxiliaires dont la formation est instantanée (*voir* n° 307 de ce Volume), réduction à laquelle ils paraissent au surplus n'avoir jamais attaché d'importance. Ayant sur ce point un sentiment tout à fait opposé, je tiens à faire remarquer que cette réduction, avec tout ce qui s'ensuit, avait été exécutée par moi,

et pour la première fois à ma connaissance, dans ma Communication d'avril 1868 au Congrès des Sociétés savantes, puis dans tous mes cours et dans mon *Nouveau Précis*. On remarquera encore qu'à l'encontre de l'opinion de M. Poincaré (*voir* p. XXIII, *inf.*), les mêmes auteurs *ne songent pas un instant* à attribuer rien de ce genre à Cauchy, dont cependant ils ont étudié et vanté les travaux avec autant d'ardeur que personne.

Dans le *Bulletin des Sciences mathématiques* (t. IV, p. 24; 1873) M. H. Laurent a analysé mon *Nouveau Précis* avec une indulgence dont je lui suis toujours reconnaissant. J'ai toutefois des observations à lui soumettre.

M. Laurent écrit (p. 25, l. 4) : « Le titre de l'Ouvrage... semblerait » indiquer de la part de M. Méray l'intention d'en faire la base du Calcul » infinitésimal; c'est ce qu'il nous est impossible d'admettre. Il est bien » évident qu'en toute rigueur *les principes les plus élémentaires de* » *l'Arithmétique, de l'Algèbre et de la Géométrie suffisent pour dé-* » *montrer toutes les propositions du Nouveau Précis;* mais les méthodes » employées dans cet Ouvrage sont tellement subtiles, tellement délicates, » qu'elles ne sauraient être bien comprises que par des personnes déjà fami- » liarisées avec les spéculations de la haute Analyse... il faut... ne pas » rompre brusquement avec des habitudes consacrées par une longue expé- » rience. » Ces appréhensions sur la valeur didactique de mes méthodes ont été heureusement contredites par les résultats constants de l'expérience faite dans mon amphithéâtre pendant vingt-quatre ans déjà, comme je le disais tout à l'heure. M. Laurent lui-même a expliqué ces résultats d'avance par les mots que j'ai soulignés, par ceux aussi qu'il a bien voulu écrire plus loin (p. 27, l. 20) : « Ce travail se fait surtout remarquer par la *rigueur* » et par l'élégance des démonstrations.... » Il est vrai que, mes élèves et moi, nous sommes un peu gênés au début, par la nécessité de « rompre » brusquement » avec les « habitudes » de l'enseignement secondaire; mais ce n'est pas ma faute si elles sont mauvaises au point de rendre une rupture nécessaire. Mon bienveillant critique se récrie sur la « subtilité » de mes méthodes; ce reproche me paraîtrait plus justement mérité par les conceptions de l'école de Riemann sur les fonctions imaginaires, à l'exposition desquelles M. Laurent a consacré tout un chapitre de son beau livre (*Traité d'Analyse,* t. VI, p. 255; 1890).

Plus loin (p. 27, l. 24) : « En nous plaçant à un autre point de vue, » nous regrettons que M. Méray n'ait pas employé le mot *fonction* dans » une acception plus générale. Que deviennent, en adoptant sa méthode, » les fonctions définies par les phénomènes physiques..., les séries de Fou- » rier, etc.? » Celles qui représentent les phénomènes dont la nature *elle-même* nous offre le spectacle ont le sort commun consistant à être développables en séries entières, etc.; telles nous les trouvons invariablement dans les formules de Newton, de Fresnel, d'Ampère, de Faraday, de tous les vrais physiciens. Quant à celles qui ne se plieraient pas à cette loi, je

les tiens pour incapables de représenter un phénomène physique observable ailleurs que sur le papier.

La théorie des nombres incommensurables, qui occupe les premières pages de mon *Nouveau Précis* (juill. 1872) et que l'on retrouvera dans le Chap. II du présent Volume, a été attribuée à M. Heine pour son invention, à MM. Lipschitz, du Bois-Reymond, G. Cantor pour ses premiers emplois, (*voir Introduction à la théorie des fonctions d'une variable,* par M. Tannery, p. IX, 1886). Le Mémoire de M. Heine, intitulé *Die Elemente der Functionenlehre* se trouve dans le t. LXXIV du *Journal für die reine, etc.* (Crelle et Borchardt) avec la date de 1872 aussi; mais trois ans auparavant j'avais exposé la même théorie tout au long, après l'avoir communiquée au Congrès, dans la *Revue des Sociétés savantes* (*Sciences mathématiques, etc.*, t. IV, p. 284; 1869). Ma Note a pour titre : *Remarques sur la nature des quantités définies par la condition de servir de limite à des variables données.* Je ne puis prononcer le nom de M. Tannery sans songer aux mentions bienveillantes dont lui et M. Molk ont honoré mon enseignement et quelques-uns de mes travaux, dans leur bel Ouvrage en cours de publication sous le titre : *Éléments de la théorie des fonctions elliptiques;* je prie MM. Tannery et Molk d'agréer tous mes remercîments.

Aux pages 13 et 23 de son Mémoire *Sur le problème des trois corps, etc.* (*Acta Mathematica*, 13 : 1 et 2, 1890), M. Poincaré, s'appuyant principalement sur un article de Cauchy inséré dans les *Comptes rendus* (t. XIV, p. 1020, 1842), lui attribue l'idée d'avoir rattaché *directement* l'existence de toute nouvelle fonction, la convergence de son développement par la formule de Taylor, à la *simple* propriété, pour les fonctions connues engagées dans les équations génératrices, d'être elles-mêmes développables de cette manière; or cette idée est précisément celle que je revendique comme mienne, ainsi que le mérite de l'avoir assise sur des raisonnements pour la première fois simples et irréprochables. Et même M. Poincaré (p. 23) place dans la bouche de Cauchy le *texte* de l'énoncé sur les fonctions implicites que j'ai communiqué en avril 1868 au Congrès des Sociétés savantes (*voir* p. XX), dont j'ai donné la démonstration en 1872 au n° 144 de mon *Nouveau Précis.*

Nul n'ignore que la plus grande part revient à Cauchy dans les découvertes dont les conséquences tirent peu à peu les principes de l'Analyse infinitésimale, de l'obscurité profonde où ils étaient enfouis; mais M. Poincaré se trompe certainement en allant aussi loin qu'il le fait. Si l'on jette en effet un coup d'œil sur cet article des *Comptes rendus,* on constatera immédiatement que la *seule* propriété supposée par Cauchy aux fonctions sur lesquelles il raisonne est celle « de rester fonctions *continues* des » arguments et des modules » des accroissements imaginaires attribués aux variables, *nullement celle d'être elles-mêmes développables.*

En outre, le même article ne contient rien absolument sur les fonctions implicites, et M. Poincaré ne dit pas où il a trouvé l'énoncé qu'il rapporte. Je ne puis croire que ce soit dans un Mémoire de Cauchy; car, si ses idées sur les fonctions implicites eussent eu une pareille netteté, ce grand homme, dans son *Mémoire sur la nature et les propriétés des racines d'une équation qui renferme un paramètre variable* publié vers la même époque (*Exercices d'An. et de Ph. mathématiques*, t. II, p. 109, 1841), n'aurait pas eu recours *pour la résolution de la simple équation* $F(x, t) = 0$ à des considérations pénibles, *n'impliquant en aucune façon le développement préalable de la fonction* $F(x, t)$. On observera encore que huit ans après on en était toujours au même point, car à la page 366 de ses *Recherches sur les fonctions algébriques* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, t. XV, 1850), Puiseux ne trouve que dans ce dernier Mémoire de Cauchy l'appui dont sa théorie particulière avait besoin. J'ajoute enfin que, si l'opinion de M. Poincaré était fondée, MM. Briot et Bouquet, qui avaient étudié Cauchy toute leur vie, qui professaient pour lui une admiration sans bornes, dont l'un m'a contesté un théorème connexe (*voir* p. XX), auraient tout au moins réclamé à son profit la priorité de la théorie générale dont je leur ai communiqué la substance en avril 1868 (*voir* p. XXI), que j'ai développée quatre ans plus tard dans mon *Nouveau Précis*. J'ai déjà fait remarquer qu'en écrivant postérieurement sur le même théorème, ils ne l'ont pas attribué davantage à Cauchy (*V.* p. XXII).

J'ai lu les lignes suivantes dans un Mémoire récent de M. Riquier *Sur les principes de la théorie générale des fonctions* (*Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*, 3ᵉ série, t. VIII, 1891) : « Depuis » un certain nombre d'années, quelques géomètres, jugeant défectueuses » les méthodes couramment employées dans l'enseignement du Calcul infi- » nitésimal, ont essayé de l'asseoir sur une base nouvelle, et de *faire* » *reposer la théorie générale des fonctions sur les propriétés des séries* » *entières*. Nous devons citer au premier rang MM. Weierstrass et Méray, » qui, sans connaître les travaux l'un de l'autre, s'étaient rencontrés dans » la même voie. M. Weierstrass n'ayant publié aucun Ouvrage d'ensemble » sur la théorie des fonctions et s'étant borné à la développer dans des » leçons orales, nous ignorons de quelle façon et dans quelles limites » l'éminent géomètre pense que l'on doive tirer parti de cette idée. Quant » à la méthode de M. Méray, qui se trouve exposée succinctement, mais » complètement, dans un Ouvrage publié en 1872, elle nous a paru, et de » beaucoup, supérieure aux méthodes courantes. Telle qu'elle est cepen- » dant... ». Malgré la haute valeur des travaux de M. Weierstrass, je n'en connais aucun, comme M. Riquier le dit fort exactement; il faut excepter, bien entendu, ce qui en a passé dans les publications françaises faites *ex professo*, et encore ai-je trop peu lu ces dernières. Mais M. Riquier ne semble pas connaître mieux que moi les travaux de l'illustre géomètre de Berlin, ni ses leçons non plus, puisqu'il déclare « ignorer de quelle

façon, etc. »; je m'étonne donc qu'il m'ait attribué dans des termes aussi absolus l'honneur de m'être rencontré avec M. Weierstrass, plutôt que celui de l'avoir précédé ou suivi. A ceux qui voudraient en décider sur des informations moins vagues, je répéterais qu'en avril 1868 je possédais les démonstrations de tous les énoncés publiés aussitôt par la *Revue des Sociétés savantes* (*voir* p. XX), telles que je les ai exposées chaque année dans mes cours publics à partir de la rentrée de 1869, puis dans mon *Nouveau Précis* en 1872. Dès la même époque (commencement de 1868) j'avais imaginé notamment la fonction auxiliaire employée au n° 137 de ce dernier Ouvrage (dite *majorante* au n° 300 du présent Volume), fonction renfermant celles que M. Bouquet a employées dans sa démonstration mentionnée à la p. XXI, et dont plusieurs personnes (avec ou sans fondement, je l'ignore) ont attribué la première idée à M. Weierstrass (*voir* Poincaré, Mémoire cité, p. 14; E. Picard, *Traité d'Analyse,* t. II, p. 320; etc.).

J'ai été très sensible aux appréciations élogieuses que M. Riquier a bien voulu émettre sur mes théories, et je lui en renouvelle tous mes remercîments. Je dois ajouter au sujet de son Mémoire une autre observation sur laquelle j'attire l'attention de ceux qui vont me lire. Après avoir honoré mon *Nouveau Précis* d'une étude minutieuse dont témoignent ses citations multipliées, après avoir honoré d'un examen non moins soigneux la première Partie de mon Ouvrage actuel dont il a eu longtemps le manuscrit entre les mains, M. Riquier n'a eu à formuler que les *quatre* légères critiques résumées comme principales dans le préambule de son travail. Je m'estimerai heureux si mes nouveaux lecteurs ne trouvent pas plus de fautes à me reprocher. Cette adhésion implicite de M. Riquier sur le fond de mes théories m'a fait vivement regretter qu'il se soit séparé de moi sur la forme, en s'engageant, pour l'améliorer, dans des considérations où il m'a été impossible de le suivre.

PRINCIPALES PUBLICATIONS DU MÊME AUTEUR.

Nouvelles Annales de Mathématiques.

Théorie géométrique de la parabole (1re série, t. XIII, 1854).

†*Théorie élémentaire des fractions, dégagée de toute considération impliquant soit la subdivision de l'unité abstraite, soit l'intervention des grandeurs concrètes. — Son application à la spécification mathématique de ces dernières* (3e série, t. VIII, 1889).

†*Sur quelques perfectionnements dont serait susceptible l'exposition de la théorie des quantités négatives* (3e série, t. IX, 1890).

†*Sur la discussion et la classification des surfaces du deuxième degré* (3e série, t. XI, 1892).

Comptes rendus de l'Académie des Sciences.

Mémoire sur les fonctions doublement périodiques, monogènes et monodromes (t. XL, 1855).

Sur des systèmes d'équations aux dérivées partielles, qui sont dépourvus d'intégrales, contrairement à toute prévision (t. CVI, 1888).

Annali di Matematica pura ed applicata.

Mémoire sur la théorie des surfaces du second ordre (1re série, t. III, 1860).

Annales scientifiques de l'École Normale supérieure.

Extension aux équations simultanées des formules de Newton pour le calcul des sommes de puissances semblables des racines d'une équation entière (1re série, t. IV, 1867).

Observations sur deux points du Calcul des variations (2e série, t. VI, 1877).

Essai sur le calcul des quantités associées en systèmes et sur son appli-

cation à la théorie des équations simultanées (2ᵉ série, t. VIII, 1879).

Solution du problème général de l'Analyse indéterminée du premier degré (2ᵉ série, t. XII, 1883).

Sur l'existence effective des deux périodes des fonctions elliptiques (3ᵉ série, t. I, 1884).

Observations sur la légitimité de l'interpolation (3ᵉ série, t. I, 1884).

Décomposition des polynômes entiers à plusieurs variables en éléments linéaires (2ᵉ série, t. II, 1885).

†*Sur la convergence des développements des intégrales ordinaires d'un système d'équations différentielles totales* (avec la collaboration de M. Riquier) (3ᵉ série, t. VI, 1889).

†*Sur la convergence des développements des intégrales ordinaires d'un système d'équations différentielles partielles* (avec la collaboration de M. Riquier) (3ᵉ série, t. VII, 1890).

Extension de la méthode de Jacobi pour intégrer une seule équation aux dérivées partielles à une fonction inconnue dont les dérivées y entrent linéairement, au cas d'un système passif d'équations de cette sorte en nombre quelconque (3ᵉ série, t. VII, 1890).

Revue des Sociétés savantes (Sciences mathématiques, physiques et naturelles).

Remarques nouvelles sur les points fondamentaux du Calcul infinitésimal et sur la théorie du développement des fonctions en séries (2ᵉ série, t. III, 1868).

Remarques sur la nature des quantités définies par la condition de servir de limites à des variables données (2ᵉ série, t. IV, 1869).

Journal de Mathématiques pures et appliquées.

†*Exposition nouvelle de la théorie des formes linéaires et des déterminants* (3ᵉ série, t. X, 1884).

Bulletin des Sciences mathématiques.

Sur l'intégration des équations différentielles linéaires à coefficients constants (2ᵉ série, t. XII, 1888).

Sur l'impossibilité de franchir par la formule de Taylor les cercles de convergence de certaines séries entières (2ᵉ série, t. XII, 1888).

Démonstration élémentaire d'un lemme fondamental de Cauchy (2e série, t. XV, 1891).

†*Méthode directe, fondée sur l'emploi des séries, pour prouver l'existence des racines des équations entières à une inconnue, par la simple exécution de leur calcul numérique* (2e série, t. XV, 1891).

Revue bourguignonne de l'Enseignement supérieur.

Théorie des radicaux, fondée exclusivement sur les propriétés générales des séries entières (t. I, 1891).

Considérations sur l'enseignement des Mathématiques (t. II, 1892).

Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse.

†*Théorie analytique du logarithme népérien et de la fonction exponentielle* (t. IV, 1891).

AVERTISSEMENT DE LA PREMIÈRE PARTIE.

Renonçant à mêler sans cesse la Géométrie à l'Analyse, les petites applications aux grandes théories, à éparpiller partout les propriétés d'une même fonction, j'ai adopté pour les matières une disposition nouvelle consistant à rapprocher tout ce qui se lie naturellement, et autant que possible tout ce qui se ressemble. Pour l'enseignement oral il peut en résulter quelques inconvénients, mais ils sont insignifiants à côté de la force et de la netteté avec laquelle les grands faits analytiques s'impriment ainsi dans l'esprit des jeunes gens. Il faut bien en arriver pourtant à traiter ceux-ci autrement que comme des enfants à initier aux quatre règles, et pour moi ce n'est encore pas assez tôt. L'espace dont je pouvais disposer se trouvant limité par des circonstances indépendantes de ma volonté, j'ai dû le réserver à ce qui mérite réellement d'être étudié et retenu, en exclure tout le reste. C'est avec plaisir, je l'avoue, que j'ai sacrifié beaucoup de ces questions de détail sur lesquelles les forces des élèves s'épuisent sans profit sérieux pour leur instruction. Mais il m'est resté bien assez de place pour toutes les théories analytiques et géométriques du programme de la Licence, que j'ai développées au prorata de leur importance; j'ai même pu y ajouter bien des choses intéressantes, qui lui sont étrangères [1]. Cette ordonnance m'a conduit à diviser l'Ouvrage en quatre Parties, dont chacune est absolument indépendante des suivantes.

Dans ce premier Volume se trouvent rassemblées toutes les propriétés générales des fonctions qui ne dépendent ni de leurs

[1] L'intelligence de mon Ouvrage, je le dirai en passant aux jeunes gens qui me feront l'honneur de l'étudier, n'exige presque pas autre chose que la pratique acquise du calcul algébrique élémentaire, avec la connaissance approfondie des équations simultanées du premier degré, ou bien, ce qui est la même chose, des principes essentiels de la théorie des déterminants.

natures spécifiques, ni du nombre des variables; le nom d'aucune fonction particulière n'y est prononcé même une fois, à part ceux des polynômes entiers et des fonctions rationnelles, matériaux obligés de toute spéculation scientifique. Cela lui donne sans doute un caractère abstrait, mais aussi rien ne masque plus la source et l'enchaînement de ces propriétés générales; j'ai tenu en outre à les isoler complètement pour mieux montrer qu'elles se peuvent tenir debout toutes seules.

Aux théories des quantités soit incommensurables, soit imaginaires, que j'ai proposées depuis bien longtemps, j'ai ajouté celles des fractions et des quantités négatives, que j'ai publiées récemment et qui ont avec elles bien des ressemblances ([1]). La conception de ces diverses fictions si utiles se trouve dégagée maintenant de toute impossibilité, de toute considération étrangère à l'Analyse pure. Je n'aperçois rien qui puisse être objecté à la manière dont je traite ces questions si controversées de tout temps. Comme dans mon *Nouveau Précis* déjà, j'ai absolument renoncé à la considération des *arguments* des quantités imaginaires, qui m'est inutile et qui ailleurs complique de fonctions transcendantes les moindres calculs algébriques.

Dans le Chapitre V, sur les propriétés générales des séries entières (pour moi elles s'identifient avec celles de toutes les fonctions analytiques), j'ai reproduit la démonstration d'un lemme fondamental de Cauchy que j'ai réussi dernièrement à trouver ([2]). Celle de mon *Nouveau Précis* était compliquée par ses appuis immédiats; les précédentes semblaient simples, mais, faisant intervenir en réalité les principes les plus variés, elles laissaient à l'état obscur et diffus les propositions capitales dont ce lemme soutient le poids. Ma démonstration actuelle, tirée des faits algébriques les plus élémentaires, change radicalement sa portée et en fait pour ainsi dire un théorème nouveau. En tout cas, elle apporte une amélioration, selon moi considérable, à toute la théorie générale des fonctions, car elle l'amène en contact intime avec les premiers

---

([1]) *Les fractions et les quantités négatives*, 1890. Paris, Gauthier-Villars et fils.

([2]) *Bulletin des Sciences mathématiques*, 2e série, t. XV, avril 1891. Une observation de M. Riquier m'avait fait présumer la possibilité de cette démonration; j'ai dit comment dans cet article.

éléments; elle m'a permis enfin de la débarrasser de toute allusion étrangère, de rejeter notamment les radicaux dans la deuxième Partie, consacrée à la monographie des fonctions d'une seule variable.

J'ai pu ainsi assigner de très bonne heure les limites maxima de la convergence des développements des fonctions; plus tôt encore j'étudie avec grand soin le *cheminement*, ou raccordement indéfini de séries de Taylor construites successivement, qui est le second élément essentiel de la génération de toute fonction nouvelle. Sous le nom de *Calcul inverse des dérivées* j'ai placé la théorie des intégrales indéfinies, très élargie, tout à côté de celle des dérivées; le rapprochement me semble avantageux et tout à fait conforme à la nature des choses.

Jusqu'au Chapitre VIII inclusivement, il n'est question que de fonctions *isolées*, c'est-à-dire considérées chacune comme si nulle autre n'existait. Le reste du Volume est consacré aux diverses opérations générales qui impliquent la *composition* des fonctions.

On a très souvent à intégrer des expressions différentielles analogues à celles qu'engendre la différentiation des fonctions composées; j'ai donc placé à la suite de cette opération, dans le même Chapitre, l'indication de la marche à suivre pour exécuter les intégrations de ce genre ou pour constater leur impossibilité. Presque partout cette question importante est mal placée; certains auteurs la passent même sous silence, à fort peu près.

Dans le Chapitre X, je démontre la convergence des développements élémentaires des intégrales d'un système d'équations différentielles totales, par l'examen de ces développements *eux-mêmes*, je veux dire sans intervention d'équations différentielles auxiliaires. C'est une simplification sensible de cette théorie; elle m'a permis en outre de ne déplacer la monographie d'aucune fonction particulière. M. Riquier avait bien voulu me faire sentir la nécessité de démontrer catégoriquement un point secondaire d'une certaine importance.

Mon *Nouveau Précis* ne contenait rien, pour ainsi dire, de ce qui compose le Chapitre XII sur les équations différentielles partielles (1); ce Chapitre et celui dont je viens de parler ont fourni

(1) Dès 1868 (ou 1869), c'est-à-dire plusieurs années avant la publication de

la matière des deux Mémoires que j'ai publiés avec le concours de M. Riquier (*Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*, t. VI, 1889, et t. VII, 1890).

En approfondissant dans le dernier Chapitre les propriétés des intégrales d'un système immédiat d'équations différentielles totales, j'ai laissé dans l'ombre tout ce qui concerne d'autres formes, notamment les équations non résolues ou bien d'ordres supérieurs au premier; ces équations effectivement ne peuvent être traitées que par une réduction aux systèmes immédiats, laquelle est dépourvue de tout intérêt en dehors des cas particuliers. J'ai raisonné sur des variables en nombre quelconque, ce cas étant aussi facile, mais plus instructif que celui d'une seule variable. On ne semble pas avoir remarqué dans mon *Nouveau Précis* que j'y ai démontré pour la première fois la possibilité de résoudre *normalement* les équations intégrales par rapport aux constantes arbitraires. Je ne crois pas cependant que cette démonstration soit sans utilité, ni sans valeur.

Ce Volume contient d'autres améliorations moins importantes

---

l'Ouvrage en question, je possédais cependant, dans ses principes essentiels, ma démonstration actuelle de la convergence des développements élémentaires des intégrales; mais, nourrissant l'illusion que la même convergence avait lieu *pour tous les systèmes immédiats*, que je réussirais un jour à traiter des cas qui m'échappaient obstinément, je n'ai pas voulu donner cette démonstration avant de l'avoir amenée au point rêvé. C'est ce qui m'a fait écrire en 1872 les lignes suivantes extraites de la Préface du même Ouvrage (p. XXI) : « ... équations » aux dérivées partielles .... J'ai pu faire faire à la question quelques pas assez » étendus. Toutefois je ne suis pas encore en possession d'une méthode simple » pour traiter le problème dans la généralité où il m'apparaît, et je préfère ne pas » insérer mon ébauche dans un Ouvrage où j'ai poursuivi la précision avant tout. » J'y reviendrai peut-être... ». Cette observation, bien entendu, laisse intacts les droits d'autres auteurs sur ce qu'ils ont publié avant moi, ceux en particulier de Mme Kowalevski.

Chez moi, cette illusion s'est enracinée plus fort que jamais le jour où j'ai cru avoir trouvé, au bout d'une autre voie, la démonstration générale qui m'avait échappé si longtemps (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 3e série, t. VI, 1880); mais plus tard M. Riquier a su en apercevoir l'insuffisance et a bien voulu me la signaler. Sur quoi, de nouveaux efforts m'ont enfin révélé l'existence de cas étendus où la convergence n'a pas lieu (*V. Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. CVI, 1888, et nos 370 *et suiv.* du présent Volume).

J'aurais à m'excuser de cette erreur si maintenant elle ne se trouvait réparée grâce à la clairvoyance de M. Riquier, si d'ailleurs on n'avait vu quelquefois de plus habiles que moi se tromper aussi.

que je ne puis indiquer ici, mais que le lecteur découvrira facilement, s'il veut bien le lire avec attention. J'ai conservé le mot *olotrope,* proposé dans mon *Nouveau Précis,* pour caractériser la propriété d'une fonction d'être représentable par une série entière dont les rayons de convergence sont tous différents de zéro. Je n'ignore pas sans doute que les géomètres ont préféré le mot *holomorphe;* mais ce dernier signifie tout autre chose, puisque dans leur bouche il exprime seulement la possession simultanée par une fonction, de certaines propriétés sans rapports nécessaires avec la possibilité de son développement, de celles d'être *finie, continue, monodrome* (*uniforme,* disent les uns, *bien déterminée,* disent les autres), *monogène,* .... Le mien d'ailleurs date de 1872 et n'est pas une copie de l'autre; ce dernier au contraire pourrait avoir été imité du mien, car c'est en 1875 seulement qu'il a été prononcé pour la première fois (Briot et Bouquet, *Théorie des fonctions elliptiques,* 2ᵉ édition, p. 14). Ces deux mots disparaîtront probablement à l'époque peu éloignée peut-être où les géomètres, ouvrant enfin les yeux sur la justesse des conceptions de Lagrange, cesseront de se préoccuper des fonctions non intégrables, continues mais sans dérivées, etc.; ils pourront alors se contenter d'appeler *singulier* l'état (accidentel) d'une fonction en des valeurs particulières des variables à partir desquelles elle se trouve ne pas être développable, d'appeler *ordinaire,* s'il y a lieu, son état normal, où elle l'est toujours.

LEÇONS NOUVELLES

SUR

L'ANALYSE INFINITÉSIMALE

ET SES

APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES.

PREMIÈRE PARTIE.

PRINCIPES GÉNÉRAUX.

CHAPITRE I.

GÉNÉRALITÉS PRÉLIMINAIRES COMPRENANT UNE REVUE DES QUANTITÉS FACTICES SUR LESQUELLES ROULENT LES SPÉCULATIONS DE L'ANALYSE MODERNE. — FRACTIONS. — QUANTITÉS POSITIVES ET NÉGATIVES.

Objet de l'Analyse infinitésimale.

1. L'*Analyse mathématique* est la science générale des *nombres,* c'est-à-dire des rapports *numériques* concevables entre les objets divers sur lesquels notre attention peut se diriger sans s'arrêter à leur nature particulière.

On y distingue d'abord l'*Arithmétique* traitant des propriétés spéciales des nombres entiers (et fractionnaires), de celles, voulons-nous dire, qu'ils ne posséderaient pas, s'ils n'étaient pas tels; puis l'*Analyse* proprement dite, où l'on étudie toutes les relations pouvant exister entre des nombres d'origines déterminées, abstraction faite des valeurs particulières qu'ils peuvent avoir dans telle ou telle circonstance. On pourrait aussi bien la nommer la *Théorie générale des fonctions* (27, 38, *inf.*).

L'*Algèbre* en est la première et la plus importante partie; on s'y

restreint au cas où les relations dont il s'agit s'établissent par des calculs réductibles à quelque combinaison des quatre opérations élémentaires : addition, soustraction, multiplication, division, exécutées chacune un nombre de fois limité. Elle est, en d'autres termes, la *théorie des fonctions rationnelles* (31, 58, *inf.*) *et des fonctions irrationnelles algébriques* (32, 58, *inf.*).

Une autre partie est l'*Analyse infinitésimale* que nous définirons : *la science des propriétés générales que confère aux fonctions leur propriété fondamentale d'être en fait toutes et toujours représentables par des séries entières* (138, *inf.*) (sauf dans des circonstances exceptionnelles que leurs modes spéciaux de génération permettent de prévoir); l'ensemble du présent Ouvrage montrera en détail la justesse de cette définition. Son nom lui vient de ce que son étude comporte plus que celle de l'Algèbre la considération systématique de quantités infiniment petites (36, 77, *inf.*).

Le reste de l'Analyse se compose de monographies de diverses classes de fonctions transcendantes (33, 58, *inf.*); on les rattache habituellement à l'Analyse infinitésimale, parce qu'elles s'y appuient plus immédiatement.

2. L'Analyse mathématique se compose d'une suite de propositions dont personne ne peut apercevoir la dernière et qui toutes se déduisent les unes après les autres d'axiomes, ou faits généraux considérés comme évidents, en nombre extraordinairement petit. Elle fournit à toutes les autres connaissances humaines des principes dont celles-ci ne sauraient se passer, et n'en emprunte à aucune. Nous la considérons comme formant à elle seule toutes les *Mathématiques pures,* dont nous excluons la Géométrie, au même titre que la Mécanique, la Physique, etc., parce qu'elle comporte essentiellement, comme ces dernières sciences, quoique dans une moindre mesure, la considération continuelle de faits spéciaux concernant le monde matériel.

Nombres fractionnaires absolus.

3. Les nombres entiers de l'Arithmétique élémentaire, sur lesquels roulent exclusivement en définitive toutes les opérations

exigées par les applications numériques, sont les seuls aussi qui interviennent au fond des spéculations théoriques. Mais l'impossibilité fréquente de certaines opérations troublerait gravement l'uniformité désirable dans le mécanisme des transformations analytiques; elle compliquerait les énoncés de restrictions continuelles, si l'on ne tournait l'obstacle en substituant aux nombres et aux opérations véritables des fictions pour lesquelles cette impossibilité ne se présente jamais et d'où, quand il le faut, on revient à la réalité sans aucun effort.

Telle est en particulier l'origine des fractions dont la conception supprime les difficultés de forme qui autrement naîtraient de l'impossibilité d'exécuter toutes les divisions (de nombres entiers).

4. Le résultat de l'opération composée consistant à multiplier un entier donné E par un second nombre n, puis à diviser le produit par un troisième d (non $=$ o), cette division étant, bien entendu, supposée possible, peut encore, suivant les circonstances, être obtenu aussi bien :

1° Si E est divisible par d, en faisant cette division et multipliant le quotient $\frac{E}{d}$ par n;

2° Si n est divisible par d, en faisant la division et multipliant E par le quotient $\frac{n}{d}$ ainsi obtenu.

On conçoit que ce dernier mécanisme de l'opération en question puisse être quelquefois préférable aux deux autres, soit en rendant plus nette la conception du résultat, soit en facilitant ses combinaisons ultérieures avec d'autres nombres, etc. *Pour en conserver les avantages quand n n'est pas divisible par d, on convient de représenter même alors le résultat de l'opération ci-dessus par le signe*

$$E \times \frac{n}{d} \quad \left(\text{ou } \frac{n}{d} \times E\right),$$

propre au cas où n est divisible par d, en lui conservant le nom de produit du nombre E *par le facteur fictif* $\frac{n}{d}$.

Ces facteurs fictifs, dont les combinaisons sont soumises à un ensemble de règles que nous allons exposer rapidement, sont précisément les *nombres fractionnaires* ou *fractions*.

Comme le mode (1°) d'exécuter l'opération composée dont nous parlons conduit à en appeler le résultat les n $d^{\text{ièmes}}$ de E, il est naturel d'appeler la fraction $\frac{n}{d}$ aussi bien n $d^{\text{ièmes}}$ que *n sur d*, d'où les noms de ***numérateur*** et ***dénominateur*** donnés à ses deux *termes* n, d respectivement, ***dont le second doit essentiellement être supposé différent de zéro.***

5. *Si la comparaison des produits d'un seul entier* E *non* $= 0$ *par les deux fractions* $\frac{n'}{d'}$, $\frac{n''}{d''}$ *successivement donne lieu à l'une des relations*

$$E\frac{n'}{d'} \gtreqless E\frac{n''}{d''},$$

la même relation aura lieu entre les produits de tout autre entier non $= 0$ *par les mêmes fractions* [pourvu, bien entendu, que ces multiplications fictives soient toutes praticables (4)].

On exprime en conséquence la corrélation constante existant à ce point de vue entre les deux fractions dont il s'agit, en disant selon le cas que la *valeur* de la première est *supérieure, égale ou inférieure* à celle de la seconde, et en écrivant comme pour les nombres entiers

$$\frac{n'}{d'} \gtreqless \frac{n''}{d''}.$$

Pour qu'il existe entre ces fractions l'une de ces relations fictives, il faut et il suffit qu'il existe entre leurs termes celle correspondante dans le tableau

$$n'd'' \gtreqless n''d'.$$

En particulier, *quand deux fractions ont même dénominateur, leur relation d'égalité ou d'inégalité est celle même existant entre leurs numérateurs.*

Quand elles ont même numérateur non $= 0$, *leur égalité entraîne celle de leurs dénominateurs et leur inégalité celle de sens contraire entre leurs dénominateurs.*

6. *En multipliant les deux termes d'une fraction par un même nombre, ou en les divisant par quelque diviseur commun,*

on obtient une fraction égale; car les termes des deux fractions $\frac{n}{d}$, $\frac{kn}{kd}$, par exemple, donnent évidemment

$$n.kd = kn.d.$$

On exprime la même chose en disant qu'*une fraction ne change pas de valeur, quand on multiplie ou divise par un même nombre ses deux termes à la fois.* D'où la distinction évidente et essentielle à faire entre la *valeur* et la *forme* de toute fraction donnée.

Quand les deux termes d'une fraction sont premiers entre eux, aucune autre ne peut lui être égale, à moins que les siens ne soient respectivement des équimultiples de ceux de la proposée, et par suite qu'ils ne leur soient au moins égaux.

On *réduit* donc une fraction à sa forme ou *expression la plus simple,* en divisant ses deux termes par leur plus grand commun diviseur; on suppose habituellement cette réduction effectuée quand on ne fait pas mention du contraire.

7. *Des fractions quelconques*

$$\frac{n'}{d'},\quad \frac{n''}{d''},\quad \frac{n'''}{d'''},\quad \ldots$$

étant données, on les réduit au même dénominateur, c'est-à-dire on leur donne, sans changer leurs valeurs, les formes nouvelles

$$(1)\qquad \frac{N'}{D},\quad \frac{N''}{D},\quad \frac{N'''}{D},\quad \ldots,$$

dont les dénominateurs sont égaux, en multipliant les deux termes de chacune des fractions proposées respectivement, par les quotients obtenus en divisant par d', d'', d''', ... successivement quelque multiple commun D de ces dénominateurs primitifs.

On obtiendrait les valeurs minima des termes des nouvelles fractions en réduisant préalablement les proposées à leurs plus simples expressions (6) et en prenant ensuite pour D le plus petit commun multiple de leurs dénominateurs.

8. *Les opérations indiquées par*

$$E\frac{n'}{d'},\quad E\frac{n''}{d''},\quad E\frac{n'''}{d'''},\quad \ldots$$

étant supposées possibles, la combinaison de leurs résultats par voie d'addition et de soustraction

$$(2)\qquad E\frac{n'}{d'} \pm E\frac{n''}{d''} \pm E\frac{n'''}{d'''} \pm \ldots,$$

donne un entier qui, quel que soit E, *peut aussi être obtenu en multipliant ce dernier nombre par une seule fraction.*

Si les fractions données

$$(3)\qquad \frac{n'}{d'},\quad \frac{n''}{d''},\quad \frac{n'''}{d'''},\quad \ldots$$

sont les fractions (1) à même dénominateur, il vient immédiatement

$$\begin{aligned} E\frac{N'}{D} \pm E\frac{N''}{D} \pm E\frac{N'''}{D} \pm \ldots &= \frac{EN' \pm EN'' \pm EN''' \pm \ldots}{D} \\ &= \frac{E(N' \pm N'' \pm N''' \pm \ldots)}{D} \\ &= E \times \left(\frac{N' \pm N'' \pm N''' \pm \ldots}{D}\right) \quad (4). \end{aligned}$$

Sinon, on les réduira au même dénominateur avant de raisonner de cette manière.

Toute autre fraction dont le produit par E *est égal au nombre composé* (2) *est égale à celle que nous venons d'obtenir;* car, par définition (5), l'égalité de deux fractions est précisément leur propriété relative de donner des produits égaux, quand on les multiplie par un même nombre.

La fraction constante en valeur, sinon en forme, dont la multiplication par E reproduit ainsi le nombre (2), se nomme *le résultat de la combinaison des fractions données* (3) *par les mêmes additions et soustractions,* et se représente par le signe habituel

$$\frac{n'}{d'} \pm \frac{n''}{d''} \pm \frac{n'''}{d'''} \pm \ldots.$$

Pour en trouver une forme, il suffit, comme on l'a vu implicite-

ment ci-dessus, de réduire les fractions proposées au même dénominateur, puis de construire la fraction ayant ce dénominateur commun, avec la somme ou différence analogue des numérateurs des fractions transformées, pour numérateur.

9. Si les opérations

$$\mathrm{E}\,\frac{n'}{d'},\quad \left(\mathrm{E}\,\frac{n'}{d'}\right)\times\frac{n''}{d''}$$

sont possibles, le résultat de la dernière, égal évidemment à

$$\mathrm{E}\,\frac{n'n''}{d'd''},$$

peut ainsi s'obtenir en multipliant E par la fraction unique $\frac{n'n''}{d'd''}$. Cette dernière, dont la loi de formation est évidente, s'appelle par convention le *produit* des fractions $\frac{n'}{d'}, \frac{n''}{d''}$.

Cette définition conduit immédiatement à celle du *produit* $\frac{n'n''n'''\dots}{d'd''d'''\dots}$ des fractions $\frac{n'}{d'}, \frac{n''}{d''}, \frac{n'''}{d'''}, \dots$ données en nombre quelconque.

10. *Étant données deux fractions quelconques*

$$\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{D}},\quad \frac{n}{d},$$

dont cependant la seconde n'a pas zéro pour numérateur, il en existe certainement quelque autre de valeur unique, dont le produit par la seconde (9) *régénère la première.*

En appelant x, y le numérateur et le dénominateur de la fraction cherchée, on veut avoir

$$\frac{nx}{dy}=\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{D}},$$

c'est-à-dire (5)

$$(nx)\mathrm{D}=\mathrm{N}(dy);$$

on a donc aussi bien

$$x(\mathrm{D}n)=(\mathrm{N}d)y$$

et, par suite,

$$\frac{x}{y} = \frac{Nd}{Dn} = \frac{N}{D} \cdot \frac{d}{n} \quad (9),$$

fraction qui d'ailleurs satisfait évidemment à la condition voulue, et qu'on nomme le *quotient* de la *division* de $\frac{N}{D}$ par $\frac{n}{d}$.

11. *Une même combinaison quelconque des opérations élémentaires ci-dessus définies, exécutée d'abord sur des fractions données, puis sur d'autres quelconques qui leur sont respectivement égales, donne deux résultats qui sont toujours égaux entre eux.* En d'autres termes, *la valeur du résultat, sinon sa forme, dépend exclusivement des valeurs des données, et nullement de leurs formes.*

L'exactitude de cette observation générale essentielle se vérifie sans peine; jointe à quelques remarques particulières faites antérieurement, elle attribue à chaque fraction, au point de vue de ce que nous avons appelé la *valeur*, une individualité constante indépendante de la *forme* qu'elle peut revêtir.

12. *Si l'entier* R *est le résultat d'un ensemble donné quelconque d'opérations arithmétiques exécutées sur les entiers* e', e'', e''', ... (*additions, multiplications, soustractions et divisions, ces dernières essentiellement supposées possibles*), *le résultat des opérations fictives de noms identiques dans la théorie des fractions, exécutées parallèlement sur les fractions correspondantes* $\frac{e'}{1}$, $\frac{e''}{1}$, $\frac{e'''}{1}$, ... (*ou sur des fractions respectivement égales*), *sera précisément la fraction* $\frac{R}{1}$ (*sous cette forme ou sous une autre*).

Pour effectuer un calcul arithmétique quelconque sur des entiers, on pourra donc tout aussi bien : 1° *prendre ceux-ci pour numérateurs de fractions ayant toutes* 1 *pour dénominateur commun;* 2° *substituer au calcul proprement dit donné le calcul fictif de même dénomination, exécuté sur ces fractions;* 3° *chercher le numérateur du résultat réduit à sa plus simple expression.*

C'est cette double substitution de nombres fractionnaires aux nombres entiers, d'opérations *fractionnaires* à celles de l'Arithmétique, que l'on opère à chaque instant dans les calculs, elle et la substitution inverse, et cela d'une manière qui devient bientôt inconsciente. Comme une division de fractions est toujours praticable, quand le numérateur du diviseur n'est pas nul (**10**), cette assimilation procure en théorie l'immense avantage qu'*aucune division impossible ne peut désormais entraver la transformation d'un groupe d'opérations données en tel autre équivalent, qui faciliterait la conception et la généralisation des résultats auxquels conduit l'étude de la question traitée.*

Un autre avantage, également très appréciable, consiste en ce qu'*on peut à volonté substituer l'une à l'autre la multiplication et la division,* à cause de

$$\frac{n'}{d'} \cdot \frac{n''}{d''} = \frac{n'}{d'} : \frac{d''}{n''} \quad (10).$$

13. D'après tout ceci, *les combinaisons opératoires des fractions $\frac{n'}{d'}, \frac{n''}{d''}, \dots$ avec des entiers $e', e'', \dots$ seront les combinaisons fractionnaires homonymes de toutes les fractions*

$$\frac{n'}{d'}, \; \frac{n''}{d''}, \; \dots, \; \frac{e'}{1}, \; \frac{e''}{1}, \; \dots.$$

De très légères modifications dans les énoncés permettent alors d'éviter toute allusion au dénominateur 1 à apposer sur les entiers $e', e'', \dots$ pour les transformer en fractions, et de créer le langage propre aux combinaisons de cette espèce. Dire, par exemple, *qu'on multiplie ou qu'on divise $\frac{n}{d}$ par e en multipliant le numérateur ou le dénominateur par e*, c'est énoncer dans ce langage spécial ces faits résultant de nos définitions, que le produit et le quotient de $\frac{n}{d}$ par $\frac{e}{1}$ sont $\frac{n.e}{d.1} = \frac{ne}{d}$ et $\frac{n.1}{d.e} = \frac{n}{de}$.

La fraction $\frac{0}{d}$ est dite *nulle,* parce que sa forme réduite est $\frac{0}{1}$ que l'on convient d'identifier à son numérateur 0.

14. Les nombres fractionnaires et les entiers, ceux-ci assimilés

aux premiers, comme nous venons de l'expliquer, sont confondus sous le nom de *quantités* ou *nombres absolus,* quand on les oppose aux quantités fictives dont nous parlerons dans le paragraphe suivant, sous le nom de quantités ou nombres *commensurables,* quelquefois *rationnels,* par opposition à celles que nous étudierons dans le prochain Chapitre.

A la théorie sommaire que nous venons d'en présenter, nous ajouterons seulement les observations générales qui suivent.

I. *Pour qu'un produit de pareilles quantités soit nul, il est nécessaire et suffisant que l'un au moins des facteurs le soit lui-même.*

Il faut effectivement et il suffit que l'entier servant de numérateur du produit soit nul et, par suite, que quelqu'un des numérateurs des facteurs dont il est le produit (9) le soit lui-même.

II. *Quand le diviseur est nul, mais non le dividende, la division est impossible. Quand ils s'évanouissent tous deux, le quotient est absolument indéterminé.*

III. *Une quantité non nulle quelconque étant donnée, on peut toujours en assigner d'autres qui lui soient inférieures.* Pour en obtenir de telles, il suffit effectivement d'augmenter arbitrairement le dénominateur de la proposée, ou bien de diminuer son numérateur, quand il est > 1.

IV. *Entre deux quantités inégales on peut en insérer d'autres dont deux consécutives quelconques aient une différence inférieure à telle quantité qu'il aura plu de choisir.* Plus brièvement : *le passage de l'une à l'autre peut s'effectuer par des variations successives aussi faibles qu'on le veut.*

La spécification mathématique des grandeurs concrètes non multiples exacts de celle adoptée pour unité est la plus importante des applications pratiques de la théorie des fractions; mais cette question est étrangère à l'Analyse pure dont nous avons exclusivement à nous occuper.

Quantités positives et négatives.

15. Comme nous venons de le voir, la substitution des nombres fractionnaires aux nombres entiers rend toutes les divisions possibles et permet même de changer une multiplication en une division, ou inversement; la substitution des nouvelles quantités fictives dont nous allons parler, aux nombres fractionnaires absolus, ajoute à ce double avantage celui de supprimer les soustractions impossibles et de permettre aussi de remplacer à volonté une soustraction par une addition, ou bien une addition par une soustraction.

Nous appellerons provisoirement *qualifiées* des quantités absolues (**14**) conventionnellement pourvues de certaines qualités factices les rendant aptes à subir les opérations également factices qui vont être successivement définies.

A chaque quantité absolue a non $= 0$, correspondront *deux* quantités qualifiées dites l'une *positive*, l'autre *négative*, dont nous appellerons a la *valeur absolue* (quelquefois *numérique*) commune, et que provisoirement nous noterons par $\overrightarrow{a}$, $\overleftarrow{a}$ respectivement.

A la quantité absolue o correspondra *une seule* quantité qualifiée dite *neutre* et de valeur absolue *nulle*, que nous représenterons par $\overline{0}$.

Deux quantités qualifiées dont les valeurs absolues sont égales entre elles, mais non à o, seront dites *égales*, si leurs noms sont identiques, *opposées* s'ils sont différents.

Deux quantités neutres seront dites indifféremment égales ou opposées.

16. L'*addition* de plusieurs quantités qualifiées données consiste à faire la somme des valeurs absolues de celles qui sont positives, puis celle des valeurs absolues des négatives, et à qualifier du nom de la plus grande de ces deux sommes son excès sur la plus petite (on néglige naturellement les quantités neutres). Quand cet excès est nul, par exemple, quand il s'agit d'additionner deux quantités qualifiées opposées, on prend $\overline{0}$ pour résultat.

En conservant pour toutes nos opérations factices les signes opératoires employés dans le calcul des quantités absolues, on aura ainsi

$$\overrightarrow{3} + \overleftarrow{7} + \overleftarrow{2} + 0 + \overrightarrow{10} + 0 = \overrightarrow{4},$$

$$0 + \overleftarrow{5} + \overrightarrow{2} = \overleftarrow{3},$$

$$\overrightarrow{\frac{3}{4}} + \overleftarrow{\frac{3}{4}} = 0.$$

Une somme de plusieurs quantités qualifiées reste la même, si l'on modifie arbitrairement l'ordre de succession de ses termes, si l'on y introduit ou bien qu'on en ôte des termes neutres en nombre quelconque.

17. *Deux quantités qualifiées quelconques étant données, on peut toujours en trouver une troisième et une seule dont l'addition avec la seconde reproduise la première.*

Pour exécuter cette *soustraction*, il suffit d'ajouter à la première quantité l'opposée de la seconde. Le résultat est la *différence* de ces quantités considérées dans l'ordre indiqué.

Exemples :

$$\overrightarrow{5} - \overleftarrow{6} = \overrightarrow{5} + \overrightarrow{6} = \overrightarrow{11}.$$

$$\overleftarrow{7} - \overleftarrow{3} = \overleftarrow{7} + \overrightarrow{3} = \overleftarrow{4}.$$

$$\overrightarrow{\frac{5}{3}} - \overrightarrow{\frac{5}{3}} = \overleftarrow{\frac{5}{3}} - \overleftarrow{\frac{5}{3}} = \overrightarrow{\frac{5}{3}} + \overleftarrow{\frac{5}{3}} = \overline{0}.$$

18. *Deux quantités qualifiées, quand elles sont égales entre elles, ont leur différence neutre, et réciproquement.*

Quand elles sont inégales, elles ont une différence positive ou négative. On dit alors, selon l'un ou l'autre de ces deux cas, que la première est *supérieure* ou *inférieure* à la seconde. Par exemple

$$\overrightarrow{7} > \overrightarrow{\frac{1}{2}} > \overline{0} > \overleftarrow{11} > \overleftarrow{15},$$

ou bien, ce qui revient au même,

$$\overleftarrow{15} < \overleftarrow{11} < \overline{0} < \overrightarrow{\frac{1}{2}} < \overrightarrow{7}.$$

Notamment, *la quantité neutre $\overline{0}$ est supérieure à toute quantité négative, inférieure au contraire à toute quantité positive.*

19. *Des quantités qualifiées données étant combinées dans un certain ordre par voie d'additions et soustractions consécutives, le même résultat final est encore obtenu si, à l'addition ou à la soustraction d'une quelconque d'entre elles, on substitue respectivement la soustraction ou l'addition de la quantité opposée.* Par exemple

$$\overleftarrow{5} - \overleftarrow{11} + \overrightarrow{6} - \overleftarrow{3} = \overleftarrow{5} + \overrightarrow{11} + \overrightarrow{6} - \overleftarrow{3}$$
$$= \overleftarrow{5} - \overleftarrow{11} - \overleftarrow{6} + \overrightarrow{3} = \overleftarrow{5} + \overrightarrow{11} + \overrightarrow{6} + \overrightarrow{3} = \ldots.$$

20. En particulier, cette observation permet de remplacer toutes les soustractions par l'addition des quantités opposées à celles qu'il faut soustraire, c'est-à-dire *de transformer toujours en une somme l'expression considérée.*

Si donc on compose plusieurs notations simples en unissant indissolublement diverses quantités qualifiées à des signes opératoires + ou — placés devant elles, si l'on écrit ces notations les unes à la suite des autres en convenant de remplacer la première par $\overrightarrow{a}$ si elle est $+\overrightarrow{a}$ ou $-\overleftarrow{a}$, par $\overleftarrow{a}$ si elle est $-\overrightarrow{a}$ ou $+\overleftarrow{a}$, on obtient une notation composée représentant la même quantité qualifiée, quel que soit l'ordre de succession adopté pour les notations simples.

Une pareille notation composée se nomme un *polynôme* dont les divers *termes* sont les notations simples formées ainsi par des associations artificielles des signes opératoires +, —, avec des quantités qualifiées.

La valeur d'un polynôme ne change pas non plus, si dans quelques termes on change simultanément le signe opératoire et le nom de la quantité qualifiée qu'il précède.

En écrivant ces termes par groupes quelconques, on obtient des polynômes partiels représentant des quantités dont la somme reproduit toujours la valeur du proposé.

21. Le *produit* de plusieurs quantités qualifiées est celle qui a pour valeur absolue le produit des valeurs absolues des *facteurs* et qui est positive quand le nombre des facteurs négatifs est nul ou pair, négative quand ce nombre est impair, neutre quand un des facteurs l'est lui-même.

Exemples :

$$\overrightarrow{a}\,.\,\overrightarrow{b}=\overleftarrow{a}\,.\,\overleftarrow{b}=\overrightarrow{ab},$$

$$\overrightarrow{a}\,.\,\overleftarrow{b}=\overleftarrow{a}\,.\,\overrightarrow{b}=\overleftarrow{ab},$$

$$\overrightarrow{a}\,.\,\overline{0}=\overleftarrow{a}\,.\,\overline{0}=\overline{0}\,.$$

Pour qu'un pareil produit soit neutre, il faut donc et il suffit que l'un au moins de ses facteurs le soit lui-même.

22. *Le produit de deux polynômes peut s'obtenir en en formant un autre qui a pour termes les divers produits des quantités qualifiées figurant dans le premier par celles qui figurent dans le second, chacun de ces produits partiels étant précédé du signe opératoire + ou —, selon que, dans les polynômes proposés, ses facteurs sont précédés de signes identiques ou différents.*

Exemple :

$$\left(+\overrightarrow{3}-\overleftarrow{4}\right)\left(-\overrightarrow{7}-\overrightarrow{5}\right)=-\left(\overrightarrow{3}\,.\,\overrightarrow{7}\right)-\left(\overrightarrow{3}\,.\,\overrightarrow{5}\right)+\left(\overleftarrow{4}\,.\,\overrightarrow{7}\right)+\left(\overleftarrow{4}\,.\,\overrightarrow{5}\right)$$

$$=-\overrightarrow{21}-\overrightarrow{15}+\overleftarrow{28}+\overleftarrow{20}\ \left(=+\overleftarrow{21}+\overleftarrow{15}+\overleftarrow{28}+\overleftarrow{20}=\overleftarrow{84}\right).$$

23. Le *quotient* de la *division* d'une première quantité qualifiée par une seconde est (en cas qu'elle existe) la quantité dont le produit par celle-ci régénère la première. Sa recherche conduit aux résultats suivants :

1° Quand le *diviseur* n'est pas neutre, le quotient existe et il

est unique; (I) neutre, si le *dividende* l'est; (II) non neutre, si le dividende ne l'est pas, et alors positif ou négatif, selon que les noms du dividende et du diviseur sont identiques ou différents; de plus, sa valeur absolue est toujours égale au quotient de celle du dividende divisée par celle du diviseur;

2° Quand le diviseur est neutre : (I) la division est impossible, si le dividende ne l'est pas en même temps; (II) le quotient est entièrement indéterminé, si le dividende est neutre aussi.

Exemples :

$$\frac{\overline{0}}{\overrightarrow{b}} = \frac{\overline{0}}{\overleftarrow{b}} = \overline{0},$$

$$\frac{\overrightarrow{a}}{\overrightarrow{b}} = \frac{\overleftarrow{a}}{\overleftarrow{b}} = \overrightarrow{\left(\frac{a}{b}\right)},$$

$$\frac{\overrightarrow{a}}{\overleftarrow{b}} = \frac{\overleftarrow{a}}{\overrightarrow{b}} = \overleftarrow{\left(\frac{a}{b}\right)},$$

$$\frac{\overline{0}}{\overline{0}} = \text{telle quantité qualifiée qu'on voudra.}$$

Comme on a

$$\overrightarrow{a} \cdot \overleftarrow{1} = \frac{\overrightarrow{a}}{\overleftarrow{1}} = \overleftarrow{a},$$

$$\overleftarrow{a} \cdot \overleftarrow{1} = \frac{\overleftarrow{a}}{\overleftarrow{1}} = \overrightarrow{a},$$

le changement d'une quantité qualifiée en son opposée équivaut à sa multiplication ou à sa division par $\overleftarrow{1}$.

24. *Dans un monôme, expression composée ne comportant que des multiplications et des divisions, la substitution, à un facteur du diviseur, de la quantité qualifiée qui lui est opposée, change seulement le nom du résultat sans changer sa valeur absolue.*

En combinant cette remarque avec celle du n° **19**, on aperçoit

que *dans toute expression impliquant seulement l'exécution d'additions, soustractions, multiplications et divisions de quantités qualifiées, on peut, où l'on voudra, remplacer l'un par l'autre les signes opératoires* $+$, $-$, *à condition de changer en même temps d'une manière convenable les noms de quelques-unes de ces quantités.*

En particulier, on peut ainsi n'y laisser subsister que des signes $+$, cela même souvent de plusieurs manières.

Exemples :

$$\frac{\overset{\dashleftarrow}{3} - \overset{\dashrightarrow}{4}}{\overset{\dashrightarrow}{1} - \overset{\dashrightarrow}{8}} - \frac{\overleftarrow{7} - \overleftarrow{1}}{\overset{\dashrightarrow}{5} \cdot \overset{\dashrightarrow}{4} - \overleftarrow{10} \cdot \overset{\dashleftarrow}{10}} = \frac{\overleftarrow{3} + \overset{\dashleftarrow}{4}}{\overset{\dashrightarrow}{1} + \overset{\dashleftarrow}{8}} + \frac{\overset{\dashrightarrow}{7} + \overleftarrow{1}}{\overset{\dashrightarrow}{5} \cdot \overset{\dashrightarrow}{4} + \overrightarrow{10} \cdot \overleftarrow{10}}$$

$$= \frac{\overset{\dashrightarrow}{3} + \overset{\dashrightarrow}{4}}{\overleftarrow{1} + \overset{\dashrightarrow}{8}} + \frac{\overleftarrow{7} + \overset{\dashrightarrow}{1}}{\overset{\dashleftarrow}{5} \cdot \overset{\dashrightarrow}{4} + \overrightarrow{10} \cdot \overrightarrow{10}} = \ldots$$

25. *Si* R *est le résultat d'additions et multiplications, soustractions et divisions (ces deux dernières sortes d'opérations étant naturellement supposées possibles) exécutées sur les quantités absolues*

$$a, \quad b, \quad c, \quad \ldots, \quad o,$$

la quantité positive $\overset{\dashrightarrow}{R}$ (*ou neutre* $\overline{o}$, *si* $R = o$) *est aussi le résultat des opérations homonymes dans la théorie des quantités qualifiées, qu'on exécuterait parallèlement sur les quantités correspondantes positives ou neutres*

$$\overrightarrow{a}, \quad \overset{\dashrightarrow}{b}, \quad \overset{\dashrightarrow}{c}, \quad \ldots, \quad \overline{o}.$$

Cette proposition évidente autorise la substitution systématique aux nombres absolus définis dans le paragraphe précédent des quantités positives dont ils sont les valeurs numériques. Et sa combinaison avec la possibilité constante de toutes les soustractions qualifiées d'une part (17), avec les observations des nos 19, 24 d'autre part, assure à la substitution dont il s'agit les deux avantages annoncés au no 15.

Moyennant la substitution ultérieure de quelques quantités négatives à des quantités positives, on reste notamment maître

de ne laisser subsister dans une expression donnée que ceux des signes opératoires + ou — qui facilitent le mieux la conception, la généralisation et l'énonciation des résultats obtenus dans la question où elle se présente. C'est en procédant ainsi, qu'on arrive par exemple à cet énoncé simple et lumineux de la règle de multiplication de deux polynômes quelconques : *Le produit est la somme des produits partiels des termes du multiplicande et du multiplicateur transformés de manière à ne plus contenir l'un et l'autre que des signes opératoires +.*

26. Le plus souvent (mais pas toujours) on a intérêt à ne laisser partout que le signe opératoire + ; le mécanisme *habituel* de cette transformation d'un polynôme à termes absolus en une somme de quantités qualifiées consiste donc à substituer une quantité positive à chaque nombre absolu qui est précédé du signe +, et une quantité négative précédée de ce même signe +, à chaque notation complexe constituée par un nombre absolu précédé du signe — et par ce signe — lui même.

Mais s'il demeure bien sous-entendu que le polynôme qualifié ne contiendra jamais que des signes +, on peut se contenter de retenir que des nombres absolus a, b, ... doivent être remplacés par les quantités positives $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, ... et des notations telles que $-a$, $-b$, ... par les quantités négatives $\overleftarrow{a}$, $\overleftarrow{b}$, ... puisqu'il est convenu qu'on écrira le signe opératoire + avant toutes ces quantités qualifiées. Cette manière de voir les choses conduit à juger équivalentes les notations

$$\overrightarrow{a},\quad \overrightarrow{b},\quad \ldots.\quad \overleftarrow{a},\quad \overleftarrow{b},\quad \ldots$$

d'une part,

$$a,\quad b,\quad \ldots.\quad -a,\quad -b,\quad \ldots$$

d'autre part et par extension

$$+a,\quad +b,\quad \ldots.\quad -a,\quad -b,\quad \ldots$$

d'autre part encore.

L'usage courant est conforme à ce dernier point de vue : on

trouve commode de confondre les quantités positives avec leurs valeurs absolues, sauf à écrire devant les notations de celles-ci, quand on tient à mieux affirmer qu'on les a transformées par la pensée en des quantités positives, le signe opératoire + *changé tacitement en un signe qualificatif*, et de représenter une quantité négative par la notation de sa valeur absolue précédée du signe opératoire — *pris de même dans un sens nouveau qui est purement qualificatif*. C'est ainsi qu'on est amené à dire que *les quantités positives ont le signe +, et les quantités négatives le signe —*, bien qu'il ne s'agisse pas nécessairement d'additions ou de soustractions à exécuter.

Enfin, le théorème du n° **25** conduit encore à identifier la quantité neutre $\overline{o}$ avec le o naturel.

Le motif invoqué à la fin du n° **14** nous interdit de nous occuper de l'application des quantités positives et négatives à la représentation analytique des grandeurs concrètes concevables, comme les segments rectilignes, les temps, etc. dans deux *directions ou sens opposés*.

Fonctions en général. — Fonctions rationnelles.

27. Nous passons à quelques notions générales qui seraient mieux placées après l'étude d'autres quantités factices auxquelles nous aurons encore à les étendre; mais nous ne pouvons nous dispenser de les exposer dès à présent en substance.

L'étude de toute question analytique conduit habituellement à la considération de trois sortes de quantités (jusqu'au n° **50** *inf.*, nous entendrons exclusivement par ce mot des quantités positives ou négatives ayant des nombres entiers ou fractionnaires pour valeurs absolues) : les unes sont invariables, d'autres peuvent varier arbitrairement entre telles ou telles limites, d'autres se calculent au moyen de celles-ci une fois déterminées numériquement, c'est-à-dire en grandeurs et en signes, par l'exécution d'opérations dont la nature est *entièrement indépendante* des valeurs particulières qu'on a pu leur attribuer.

Les premières quantités sont des *constantes;* les secondes se nomment des *variables indépendantes* et se désignent habituelle-

ment par les dernières lettres de l'alphabet $x, y, z, \ldots$; les dernières sont dites *fonctions de ces variables* et se représentent par des signes $f(x, y, z, \ldots)$, $F(x, y, z, \ldots)$, ... propres à rappeler la nature spéciale des opérations à exécuter sur les variables pour obtenir leurs valeurs.

Quelquefois la nature d'une fonction dépend des valeurs de certaines quantités qui interviennent sans doute dans les calculs générateurs, mais qu'on a intérêt à ne pas considérer comme des variables indépendantes; on les nomme les *paramètres* de la fonction. Par exemple, selon le point de vue qui paraîtra préférable, $x^2 + a^2$ sera, ou bien une fonction de nature déterminée des quantités x, a considérées comme deux variables indépendantes, ou bien une fonction de la seule variable x, changeant de nature avec la valeur qui peut être attribuée au paramètre a.

Une *expression* analytique est la même chose qu'une fonction, à cela près que les quantités qui s'y trouvent engagées ne sont pas nécessairement des variables indépendantes.

28. Une *égalité* est l'expression de la coïncidence numérique de deux quantités d'origines différentes.

Une *identité* est l'expression de l'égalité constante des valeurs que prennent deux fonctions des mêmes variables dont les origines sont différentes, quand, dans l'une et dans l'autre, et entre les limites où elles sont définies, on attribue aux variables tous les systèmes imaginables de valeurs particulières.

Une *équation* est, à proprement parler, une égalité à faire naître, par l'attribution de valeurs convenables à des quantités *inconnues,* entre deux fonctions données de ces inconnues.

Mais le tout se confond souvent sous la même dénomination d'*équations,* le sens de ce mot variant ainsi avec les circonstances.

Habituellement, il est avantageux de débarrasser le second membre d'une équation de tous les termes qui peuvent s'y trouver, en les faisant passer dans l'autre membre. Sous cette forme, l'équation exprime l'égalité à zéro d'une certaine expression qu'on nomme plus spécialement *son premier membre.*

29. Chacune des trois premières opérations élémentaires : addition, soustraction, multiplication (comprenant l'élévation aux puis-

sances), n'ayant jamais qu'un nombre entier pour résultat, quand on l'exécute exclusivement sur de pareils nombres, toute combinaison qu'on peut faire des unes et des autres jouit de la même propriété, et constitue une opération composée qu'on peut nommer *entière*.

Cela posé, une fonction est dite *entière,* quand les calculs à exécuter sur les variables indépendantes, pour obtenir sa valeur. sont réductibles à quelque opération entière.

On aperçoit immédiatement que toute fonction de cette espèce peut être mise sous forme d'une somme de monômes entiers dissemblables par rapport aux variables indépendantes. Nous supposerons toujours cette transformation effectuée, et nous nommerons *termes effectifs* de la fonction ceux de ces monômes dont les coefficients ne sont pas nuls. Son degré *effectif* est la plus grande somme des exposants des variables dans ses termes effectifs.

Il y a souvent lieu de le distinguer du degré *apparent,* c'est-à-dire de la valeur que le degré effectif atteint habituellement dans la question où la fonction se présente, mais au-dessous de laquelle il peut s'abaisser par l'évanouissement accidentel de quelques coefficients.

Une fonction entière de degré zéro dégénère en une constante.

Pour abréger, on appelle *linéaires* les fonctions entières du premier degré qui se rencontrent à chaque instant, *homogène* toute fonction entière dont les termes sont de degrés égaux.

30. Si, outre des opérations entières, le calcul de la valeur d'une fonction comprend essentiellement la division, cette fonction est dite *fractionnaire.* On s'assure facilement que le nombre des divisions peut être réduit à 1, qu'ainsi la fonction peut être mise sous forme du quotient de deux fonctions entières qui se nomment respectivement son *numérateur* et son *dénominateur* et qu'on peut supposer n'avoir aucun diviseur entier commun. Sous cette forme, on nomme souvent *degré* de la fonction le plus élevé des degrés (effectifs ou apparents) de ses deux termes.

Une fonction fractionnaire est dite quelquefois *homogène* quand son numérateur et son dénominateur le sont l'un et l'autre.

31. Les fonctions entières et fractionnaires sont de beaucoup

les plus importantes de toute l'Analyse, dont elles sont pour ainsi dire les matériaux essentiels.

Les opérations composées d'où elles dérivent (opérations entières accompagnées de la division pour les dernières) offrent le caractère commun d'avoir nécessairement un résultat rationnel, quand les quantités sur lesquelles on les exécute le sont toutes elles-mêmes (*Cf.* **14**). A cause de cela, on les confond toutes sous la dénomination de fonctions *rationnelles*. Il y a cependant à noter entre elles une très grande différence. Les calculs générateurs d'une fonction entière sont essentiellement décomposables en opérations *directes* et toujours *possibles*, en sorte que la fonction est définie pour tous les systèmes imaginables de valeurs particulières des variables indépendantes. La division étant au contraire une opération *indirecte* qui devient *impossible*, quand le diviseur a une valeur nulle, une fonction fractionnaire n'est pas définie pour les systèmes de valeurs des variables qui annulent son dénominateur.

32. Les fonctions *irrationnelles algébriques* sont celles qu'engendre la résolution de quelque système d'équations *entières* (de degrés > 1) entre elles et les variables indépendantes, c'est-à-dire d'équations ayant toutes pour premiers membres des fonctions entières des variables indépendantes et des fonctions considérées (**28**), (**29**). Elles forment la classe la plus intéressante des fonctions *implicites* (Chap. XI, *inf.*) et leur étude complète exige l'intervention des ressources propres à l'Analyse infinitésimale. Elles comprennent comme cas particuliers plus simples toutes les expressions algébriques compliquées de radicaux.

L'exécution d'une division n'étant au fond que la résolution, par rapport au quotient inconnu q, de l'équation du premier degré

$$dq - \mathrm{D} = 0,$$

où d, D désignent le diviseur et le dividende, les fonctions fractionnaires (**30**) se rattachent, à ce point de vue, plutôt aux irrationnelles algébriques qu'aux fonctions entières. Mais on les rapproche plus volontiers de ces dernières, à cause de leur caractère

commun d'être engendrées par des opérations non ambiguës, c'est-à-dire ne pouvant pas conduire à *plusieurs* résultats.

33. Les fonctions qui ne sont ni rationnelles, ni irrationnelles algébriques, sont dites *transcendantes*. Comme ceux des irrationnelles, leurs calculs générateurs impliquent toujours la considération de quelque nombre entier croissant au delà de toute limite.

CHAPITRE II.

SUITE DU PRÉCÉDENT. — VARIANTES EN GÉNÉRAL.
QUANTITÉS INCOMMENSURABLES.

Convergence et divergence des variantes.

34. En Analyse infinitésimale on est obligé, presque à tout instant, de considérer des quantités variant de manière à prendre successivement des valeurs numériques déterminées en nombre illimité. Nous les appellerons des *variantes*.

Chaque valeur d'une variante dépend habituellement des valeurs correspondantes de un ou plusieurs entiers positifs qui croissent sans cesse de l'une d'elles à la suivante et, par suite, indéfiniment : ce sont ses *indices*. Quelquefois ces nombres ne sont pas explicitement spécifiés ; on prend alors pour indices des numéros d'ordre convenables attribués aux diverses valeurs de la variante.

Par exemple, le $m^{\text{ième}}$ terme ar^{m-1} d'une progression géométrique ayant a pour premier terme avec r pour raison, la somme, le produit, etc., des m premiers termes de cette progression sont des variantes ayant m pour indice.

Pour une variante définie par ses deux premières valeurs et par cette condition que chacune des subséquentes soit égale à la somme des deux précédentes, aucun indice n'est spécifié ; mais le rang de chaque valeur lui en servira.

Si l'on donne a, r, s, l'expression $ar^m s^n$ est une variante ayant pour indices les deux entiers m, n ; etc.

On dit qu'une variante $v_{m,n,\ldots}$ jouit de telle propriété déterminée *à partir des valeurs* μ, ν, ... de ses indices, quand la propriété en question lui appartient pour toutes les combinaisons des valeurs des indices vérifiant simultanément les relations

$$m \geqq \mu, \qquad n \geqq \nu, \qquad \ldots;$$

on dit encore qu'elle *finit* par jouir de la même propriété, quand il existe des valeurs des indices à partir desquelles cette propriété ne cesse de lui appartenir.

35. Une variante $v_{m,n,\ldots}$ est *finie*, s'il existe quelque quantité positive invariable L, telle que l'on finisse par avoir numériquement $v_{m,n,\ldots} < L$.

Elle est *de petitesse limitée*, si l'on finit, au contraire, par avoir numériquement $v_{m,n,\ldots} > l$, l étant quelque quantité positive (non $= 0$).

36. Si, quelque petite qu'on puisse prendre la quantité positive ε, on finit toujours par avoir numériquement $v_{m,n,\ldots} < \varepsilon$, la variante $v_{m,n,\ldots}$ se nomme une *quantité infiniment petite*.

37. Une fonction donnée $f(u_m, v_{n,p}, w_{m,r\ldots}, \ldots)$ de variantes ayant ou non des indices communs, est évidemment une nouvelle variante ayant pour indices ceux des entiers m ; n, p ; $m, r, \ldots$; ... qui sont distincts les uns des autres. Cela posé, les observations suivantes sont à peu près évidentes.

Une fonction entière de variantes finies, le quotient d'une variante finie par une autre de petitesse limitée sont des variantes finies.

Sont infiniment petites : 1° *Une fonction entière de variantes, les unes finies, les autres infiniment petites, pourvu que chacun de ses termes contienne comme facteur l'une au moins de ces dernières;* 2° *le quotient de deux variantes, la première infiniment petite, la seconde de petitesse limitée.*

38. En appelant

$$(1) \qquad \begin{cases} m', & n', & \ldots, \\ m'', & n'', & \ldots \end{cases}$$

deux systèmes de valeurs arbitraires des indices d'une variante donnée $v_{m,n,\ldots}$, la différence

$$(2) \qquad v_{m'',n'',\ldots} - v_{m',n',\ldots}$$

est une nouvelle variante (37) ayant tous les nombres (1) pour

indices. Dans le cas particulièrement remarquable où cette différence est infiniment petite, nous dirons que la variante considérée $v_{m,n,\ldots}$ est *convergente*. Telle est évidemment en particulier une variante infiniment petite (36).

Telle est encore *une variante finie* (35) *qui, algébriquement, et quand aucun de ses indices ne varie en décroissant, finit par ne pouvoir décroître ou bien par ne pouvoir croître*.

Supposons, par exemple, qu'il s'agisse de la variante v_m finissant par ne pouvoir décroître. Si elle n'était pas convergente, on pourrait assigner quelque quantité positive α, puis une première suite indéfinie d'entiers croissants $\mu'_1, \mu'_2, \ldots, \mu'_p, \ldots$ et une seconde suite d'entiers $\mu''_1, \mu''_2, \ldots, \mu''_p$ respectivement supérieurs aux précédents, qui donneraient lieu numériquement, et même algébriquement puisque v_m est non décroissante, à la suite indéfinie d'inégalités

$$\begin{array}{l} v_{\mu''_1} - v_{\mu'_1} > \alpha, \\ v_{\mu''_2} - v_{\mu'_2} > \alpha, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ v_{\mu''_p} - v_{\mu'_p} > \alpha, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

De plus on peut supposer, quel que soit p, $\mu'_p \geq \mu''_{p-1}$, sauf à supprimer chacune de ces inégalités dont la comparaison avec la précédente donnerait le contraire.

La suite $\mu'_1, \mu''_1, \mu'_2, \mu''_2, \ldots, \mu'_p, \mu''_p, \ldots$ n'étant pas décroissante, on a par hypothèse

$$\begin{array}{l} v_{\mu'_2} - v_{\mu''_1} \geq 0, \\ v_{\mu'_3} - v_{\mu''_2} \geq 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ v_{\mu'_p} - v_{\mu''_{p-1}} \geq 0. \end{array}$$

L'addition membre à membre de ces inégalités avec les p premières de la suite précédente donnerait

$$v_{\mu''_p} > v_{\mu'_1} + p\alpha,$$

et, contrairement à l'hypothèse, v_m ne serait pas finie, puisqu'on pourrait prendre p et par suite $m = \mu''_p$ assez grands, pour que v_m surpassât toute quantité donnée.

39. Deux variantes convergentes sont *équivalentes,* si leur différence, considérée comme variante dépendant de leurs indices distincts (37), est infiniment petite.

Deux variantes v, w équivalentes à une même troisième u le sont l'une à l'autre.

Car alors la différence $v - w$, qui peut s'écrire $(v-u)-(w-u)$, est infiniment petite (36).

40. *Une variante w dont toutes les valeurs font partie de la suite de celles d'une autre v qui est convergente est aussi convergente, de plus équivalente à cette dernière, pourvu toutefois que les valeurs particulières à attribuer successivement aux indices de v pour former la suite des valeurs de w croissent toutes indéfiniment.*

Supposons, pour fixer les idées, que les valeurs de w_n fassent ainsi partie de la suite de celles de v_m supposée convergente, et nommons généralement m_n la valeur de m rendant $v_m = w_n$. Par hypothèse, m_n croît sans limite, quand on fait augmenter n indéfiniment.

Cela posé, les différences $w_{n''} - w_{n'}$, $w_n - v_m$ sont infiniment petites, puisqu'elles sont égales aux différences $v_{m_{n''}} - v_{m_{n'}}$, $v_{m_n} - v_m$, qui le sont toutes deux à cause de la convergence de v_m. C'est ce qu'il fallait montrer.

41. Il est évident que *deux variantes infiniment petites sont équivalentes, qu'une variante donnée est infiniment petite, si elle est équivalente à une autre l'étant elle-même.*

42. *Une variante convergente est toujours finie.*

Si en outre elle n'est pas infiniment petite, elle est de petitesse limitée et finit par conserver un signe constant.

Raisonnons sur la variante v_m à un seul indice, et nommons ε une quantité positive arbitrairement choisie. Par hypothèse, il existe des entiers μ', μ'' tels que, pour $m' \geqq \mu'$, $m'' \geqq \mu''$, on a numériquement

$$v_{m''} - v_{m'} < \varepsilon,$$

d'où

$$v_m - v_{\mu'} < \varepsilon,$$

à partir de $m = \mu''$.

Comme on peut écrire

$$v_m = v_{\mu'} + (v_m - v_{\mu'}),$$

on voit que, si φ désigne la valeur numérique de $v_{\mu'}$, on finit bien par avoir numériquement

$$v_m < \varphi + \varepsilon;$$

v_m est donc finie.

Supposons, en second lieu, que v_m ne soit pas de petitesse limitée, et soient

$$\varepsilon_1, \quad \varepsilon_2, \quad \ldots, \quad \varepsilon_k, \quad \ldots$$

les valeurs successives d'une variante auxiliaire infiniment petite. On pourrait satisfaire indéfiniment aux inégalités numériques

$$v_{m_1} < \varepsilon_1, \quad v_{m_2} < \varepsilon_2, \quad \ldots, \quad v_{m_k} < \varepsilon_k, \quad \ldots$$

par des valeurs de $m_1, m_2, \ldots, m_k, \ldots$ qui croîtraient sans cesse, et la variante $w_k = v_{m_k}$ serait infiniment petite. Mais, w_k étant équivalente à v_m (40), cette dernière serait infiniment petite aussi, contrairement à l'hypothèse (41).

On peut ainsi, dans le cas qui nous occupe, assigner une quantité positive l telle qu'on finisse par avoir numériquement

$$v_m > l.$$

Si donc le signe de v_m ne finissait pas par demeurer invariable, on pourrait former une suite croissante d'entiers

$$m_1, \quad m_2, \quad \ldots, \quad m_k, \quad \ldots,$$

telle que v_{m_k} et $v_{m_{k+1}}$ fussent toujours de signes contraires et qu'on eût, par suite, toujours numériquement,

$$v_{m_{k+1}} - v_{m_k} > 2l,$$

ce qui est impossible puisque v_m est supposée convergente.

43. *Toute fonction entière de variantes convergentes est elle-même une variante convergente.*

Il en est de même pour une fonction rationnelle fractionnaire, pourvu que son dénominateur ne soit pas infiniment petit (30).

I. Soit d'abord $f(u, v, w, \ldots)$ une fonction entière des variantes convergentes considérées $u, v, w, \ldots$, dont nous nous dispensons de noter les indices. En attribuant à ces indices deux systèmes de valeurs que nous ferons toutes croître indéfiniment et indépendamment les unes des autres, en nommant généralement $u', v', w', \ldots, u'', v'', w'', \ldots$ les deux groupes correspondants de valeurs de nos variantes et en posant

$$u''-u'=\alpha, \quad v''-v'=\beta, \quad w''-w'=\gamma, \quad \ldots$$

d'où

$$u''=u'+\alpha, \quad v''=v'+\beta, \quad w''=w'+\gamma, \quad \ldots,$$

il viendra, si l'on développe le polynôme

$$f(u'', v'', w'', \ldots)=f(u'+\alpha, v'+\beta, w'+\gamma, \ldots)$$

d'une manière convenable,

$$f(u'', v'', w'', \ldots)-f(u', v', w', \ldots)=\Theta,$$

où Θ est un polynôme entier en $u', v', w', \ldots, \alpha, \beta, \gamma, \ldots$ dont chaque terme contient comme facteur l'une au moins de ces dernières quantités. Comme $u', v', w', \ldots$ sont finies (42) et que α, $\beta, \gamma, \ldots$ sont des quantités infiniment petites, parce que u, v, $w, \ldots$ sont convergentes, Θ est nécessairement une quantité infiniment petite (37) et, par suite, $f(u, v, w, \ldots)$ est une variante convergente.

II. *Si p, q sont deux variantes convergentes, la seconde non infiniment petite, leur rapport $\frac{p}{q}$ est aussi une variante convergente.*

Si p', q' et p'', q'' sont les valeurs de p, q correspondant à deux systèmes de valeurs des indices indéfiniment croissantes, on a

$$\frac{p''}{q''}-\frac{p'}{q'}=\frac{p''q'-p'q''}{q'q''}.$$

Le numérateur de cette dernière expression, qu'on peut écrire

$$(p''-p')q'-(q''-q')p',$$

est infiniment petit (37), parce que, p, q étant convergentes, d'une part p', q' sont des quantités finies (42), d'autre part les différences $p''-p'$, $q''-q'$ sont infiniment petites.

Son dénominateur est de petitesse limitée, parce que q étant convergente, mais non infiniment petite, on finit par avoir numériquement, en appelant l quelque quantité positive, $q > l$ (42), d'où $q'q'' > l^2$.

L'expression dont il s'agit est donc infiniment petite (37), ce dont il fallait s'assurer.

III. La combinaison des deux alinéas précédents complète évidemment la démonstration de notre théorème, pourvu que, dans le second, p, q désignent le numérateur et le dénominateur de la fonction rationnelle fractionnaire dont il s'agit.

44. *Si f est la caractéristique d'une fonction entière ou d'une fonction rationnelle fractionnaire à dénominateur non infiniment petit, et si u', v', w', ... d'une part, u'', v'', w'', ... d'autre part, désignent maintenant deux groupes de variantes convergentes et respectivement équivalentes, les variantes*

$$f(u', v', w', \ldots), \qquad f(u'', v'', w'', \ldots),$$

que nous savons être convergentes (43), *sont de plus équivalentes l'une à l'autre.*

Les différences $u''-u'$, $v''-v'$, $w''-w'$, ... étant toutes infiniment petites comme ci-dessus, la démonstration de cette proposition se fera en répétant textuellement celle du théorème précédent.

45. Une variante est *divergente,* quand elle n'est pas convergente. On peut alors établir entre les entiers (1) des relations telles, qu'en croissant indéfiniment ensemble de cette manière, ils laissent la valeur numérique de la différence (2) supérieure à quelque quantité positive (non $=0$).

Si par exemple a, b sont des quantités inégales, et si v_m a pour

valeurs, a quand m est impair, b quand m est pair, cette variante est divergente; car, en prenant m', m'' toujours de parités différentes, la différence $v_{m''} - v_{m'}$ se réduit sans cesse à $\pm(a-b)$ et par suite n'est pas infiniment petite.

46. Une variante dont la valeur numérique finit par se maintenir supérieure à toute quantité positive donnée n'est pas finie: par suite (**42**) elle est divergente. Les variantes divergentes de cette espèce doivent être particulièrement remarquées; on les nomme des *quantités infinies*.

Voici à ce sujet quelques remarques à peu près évidentes :

Le produit d'une variante de petitesse limitée par une quantité infinie est aussi une variante infinie.

Quand une variante est infiniment petite ou infinie, son inverse arithmétique est infinie dans le premier cas, infiniment petite dans le second.

La définition d'une quantité infinie comme inverse arithmétique d'une variante infiniment petite présenterait certains avantages dans la théorie générale des fonctions; mais ils ne sont pas assez sensibles pour nous en faire abandonner la conception habituelle.

Limites effectives ou idéales des variantes convergentes.

47. On dit que la variante $v_{m,n,\ldots}$ *a pour limite* ou *tend vers* la quantité (invariable) V, quand la différence

$$V - v_{m,n,\ldots}$$

est infiniment petite; et, pour exprimer ce fait, on écrit

$$\lim v_{m,n,\ldots} = V.$$

En particulier, *une variante infiniment petite tend vers zéro.*

48. *Toute variante tendant vers quelque limite est convergente* (**38**).

Car la différence $v_{m'',n'',\ldots} - v_{m',n',\ldots}$ pouvant alors s'écrire

$$(V - v_{m',n',\ldots}) - (V - v_{m'',n'',\ldots})$$

est infiniment petite, comme les deux termes de cette expression, pour des valeurs toutes infinies des indices.

On s'assurera de la même manière que *deux variantes tendant vers une même limite sont équivalentes,* et que *si une variante donnée tend vers une certaine limite, toute autre équivalente tend aussi vers la même limite.*

49. *Si les variantes* u, v, w, ... *tendent respectivement vers les limites* U, V, W, ..., *et si* $f(u, v, w, \ldots)$ *désigne une fonction de ces variantes, soit entière, soit fractionnaire, mais n'ayant pas alors un dénominateur tendant vers zéro,* on a

$$\lim f(u, v, w, \ldots) = f(U, V, W, \ldots).$$

Appelons υ une variante dont toutes les valeurs soient égales à U, et de même φ, ψ, ... d'autres variantes ne prenant jamais que les valeurs V, W, ... respectivement. Ces variantes υ, φ, ψ, ... étant évidemment équivalentes à u, v, w, ... respectivement, $f(\upsilon, \varphi, \psi, \ldots)$ est équivalente à $f(u, v, w, \ldots)$ (44); en autres termes, la différence

$$f(U, V, W, \ldots) - f(u, v, w, \ldots)$$

est infiniment petite, ce qu'il fallait voir.

50. Si les variantes douées de limites sont toutes convergentes (48), inversement les variantes convergentes n'ont pas toutes des limites, du moins tant qu'on laisse au mot *nombre* ou *quantité* le sens que nous lui avons attribué jusqu'ici. Mais on préfère uniformiser et imager le langage par un ensemble de *conventions* dont voici les principales :

I. Quand une variante convergente ne tend pas vers quelque limite, on lui en assigne une *idéale* qu'on nomme un nombre ou une quantité *incommensurable,* et qu'on représente par le même signe que si elle existait réellement. On peut alors exprimer la convergence d'une variante quelconque, en disant qu'*elle tend vers une certaine limite* (effective ou idéale suivant le cas).

II. Quand deux variantes convergentes sont équivalentes, on

dit que *leurs limites (commensurables ou incommensurables) sont égales.*

III. Aux énoncés des nos **43**, **44** on substitue celui du no **49**, *ce qui définit dans tous les cas une fonction de quantités commensurables ou incommensurables, soit entière, soit rationnelle fractionnaire à dénominateur non infiniment petit,* en particulier *la somme, la différence, le produit, les puissances, le quotient, etc.* de pareilles quantités.

IV. Si une semblable fonction $f(u, v, w, \ldots)$ des variantes convergentes $u, v, w, \ldots$ se trouve être infiniment petite, on dira plus simplement qu'*entre leurs limites* (commensurables ou incommensurables) U, V, W, ..., *il existe l'équation*

$$f(U, V, W, \ldots) = 0.$$

V. Quand une variante convergente n'est pas infiniment petite, elle finit par conserver soit le signe +, soit le signe — (**42**), le même évidemment que celui de sa limite, si celle-ci existe effectivement. Si elle n'existe pas, on dit que la quantité incommensurable correspondante est *positive dans le premier cas, négative dans le second.*

VI. Une quantité incommensurable est dite *supérieure ou inférieure* à une autre quantité soit commensurable, soit incommensurable, selon que leur différence est positive ou négative.

Etc.

51. Une quantité quelconque A étant donnée ainsi qu'une autre positive δ, si la différence $A - a$ est numériquement inférieure à δ, on dit que *a est une valeur approchée de A à δ près, par défaut ou par excès, suivant que cette différence est positive ou négative.*

Quand A est la limite effective d'une variante convergente connue $v_{m,n,\ldots}$, ses valeurs approchées peuvent être obtenues par la simple considération de cette dernière. Si, en effet, $\mu, \nu, \ldots$ sont des entiers à partir desquels on a numériquement

$$v_{m,n,\ldots} - v_{\mu,\nu,\ldots} < \tfrac{1}{2}\delta,$$

on aura toujours, mais algébriquement,

$$v_{m,n,\dots} - v_{\mu,\nu,\dots} + \tfrac{1}{2}\delta > 0, \qquad v_{m,n,\dots} - v_{\mu,\nu,\dots} - \tfrac{1}{2}\delta < 0,$$

d'où évidemment

$$v_{\mu,\nu,\dots} - \tfrac{1}{2}\delta < A < v_{\mu,\nu,\dots} + \tfrac{1}{2}\delta.$$

Les membres extrêmes de ces inégalités sont ainsi des valeurs approchées de A à δ près, la première par défaut, la seconde par excès.

Quand A est un nombre incommensurable, *ses valeurs approchées* se déduisent, comme ci-dessus, d'une valeur convenablement choisie de la variante convergente dont il est la limite fictive.

52. La démonstration du théorème suivant faite à ce point de vue nous sera utile et éclaircira mieux ce que nous venons de dire [1].

Une quantité positive quelconque A a toujours une racine $m^{\text{ième}}$ positive et une seule.

I. *L'expression u^k, où u est une quantité positive invariable et k un entier infini, croît ou décroît sans cesse et indéfiniment, selon que $u \gtrless 1$.*

Soit d'abord $u = 1 + \varepsilon$, ε étant > 0.

On a $u^{k+1} = u^k(1+\varepsilon) = u^k + \varepsilon u^k$, d'où $u^{k+1} > u^k$. On trouve facilement d'autre part $(1+\varepsilon)^k > 1 + k\varepsilon$; or cette dernière quantité est infinie comme k.

Si, en second lieu, u est < 1, $\frac{1}{u}$ est > 1, et, par ce qui précède, $\left(\frac{1}{u}\right)^k = \frac{1}{u^k}$ croît sans cesse et indéfiniment. Donc $u^k = 1 : \frac{1}{u^k}$ décroît sans cesse en tendant vers zéro (46).

[1] Nous traitons cette question ici pour faire une application immédiate de notre théorie des nombres incommensurables, et aussi parce que nous aurons incessamment à extraire des racines carrées pour former les modules des quantités imaginaires (59, *inf.*). Mais il n'est pas sans intérêt pour le lecteur de noter que les développements en séries, employés exactement comme nous l'avons fait dans un Mémoire spécial intitulé *Théorie des radicaux, etc.* (*Revue bourguignonne de l'Enseignement supérieur*, t. I, 1891), fourniraient une méthode bien meilleure en théorie pour établir même l'existence des radicaux arithmétiques; seulement il faudrait la faire précéder par l'exposition des propriétés des séries entières à variables et à coefficients *réels*, faite séparément.

II. *Il existe quelque variante positive dont la $m^{ième}$ puissance tend vers* A.

En supposant $A > 1$ pour fixer les idées, soit u une quantité positive > 1, et formons la suite

$$1, \quad u, \quad u^2, \quad \ldots.$$

Comme les termes vont en croissant sans cesse et indéfiniment (I), il y en a certainement deux consécutifs u^{k_u}, u^{k_u+1} donnant

$$u^{k_u} < A \leqq u^{k_u+1},$$

d'où

$$A - u^{k_u} \leqq u^{k_u+1} - u^{k_u} \leqq u^{k_u}(u-1) < A(u-1),$$

et, par suite,

$$\lim u^{k_u} = A,$$

si l'on fait tendre u vers 1.

Soient maintenant q_u, r_u le quotient et le reste de la division de k_u par m, et posons $u^{q_u} = v$. A cause de $k_u = mq_u + r_u$, on aura

$$v^m = \frac{u^{k_u}}{u^{r_u}}$$

et de plus $\lim u^{r_u} = 1$ à cause de $r_u < m$, $\lim u = 1$.

On aura donc (49)

$$\lim v^m = \frac{\lim u^{k_u}}{1} = A,$$

ce qu'il fallait prouver.

Même raisonnement pour $A < 1$, à cela près qu'il faut prendre $u < 1$.

III. *Toute variante positive v dont la $m^{ième}$ puissance tend vers* A *est convergente.*

Il existe évidemment quelque quantité positive α dont la $m^{ième}$ puissance est $< A$, et v finit par la surpasser, car autrement v^m ne finirait pas par surpasser α^m et, par suite, ne tendrait pas vers $A > \alpha^m$.

Cela posé, soient v', v'' deux valeurs de v dont les indices croissent indéfiniment. En appelant ε', ε'' deux certaines quantités infi-

niment petites, on a, par hypothèse,

$$A - v'^m = \varepsilon', \qquad A - v''^m = \varepsilon'',$$

d'où

$$v'' - v' = - \frac{\varepsilon'' - \varepsilon'}{v''^{m-1} + v''^{m-2}v' + \ldots + v'^{m-1}},$$

et finalement en valeur numérique

$$v'' - v' < \frac{\varepsilon'' - \varepsilon'}{m\alpha^{m-1}},$$

ce qui donne bien

$$\lim(v'' - v') = 0.$$

IV. *Deux variantes telles que v sont toujours équivalentes.* Pour s'en assurer, il suffit de les désigner par v', v'', et de recommencer textuellement le raisonnement ci-dessus.

V. Quand par hasard A est la $m^{\text{ième}}$ puissance de quelque quantité a, toutes les variantes telles que v tendent vers a et les faits ci-dessus offrent peu d'intérêt. Mais, quand il en est autrement, ces variantes ne peuvent tendre vers aucun véritable nombre. Les conventions du n° 50 interviennent alors, pour faire rentrer dans notre énoncé l'affirmation des faits dont il s'agit.

Ces mêmes conventions permettent de recommencer le raisonnement qui précède, même dans le cas où A serait un nombre incommensurable et, par suite, de préciser le sens de la notation $\sqrt[m]{A}$ $\left(\text{ou } A^{\frac{1}{m}}\right)$ pour toutes les valeurs de A, que cette quantité soit commensurable puissance $m^{\text{ième}}$ ou non, ou bien qu'elle soit incommensurable.

53. En déterminant comme nous venons de le faire, la nature spéciale des quantités incommensurables, en leur étendant, combinées ou non avec des quantités commensurables, les diverses opérations élémentaires (toutes comprises dans la formation d'une fonction rationnelle), *nous avons réalisé implicitement la même extension pour toutes les autres opérations de l'Analyse;* car chacune d'elles se réduit en définitive à quelque combinaison plus ou moins compliquée des quatre règles vulgaires du calcul.

Nous n'avons donc plus aucune raison pour maintenir la res-

triction faite jusqu'ici tacitement par nous sur le sens du mot *quantité;* désormais nous l'appliquerons aussi bien aux limites idéales de variantes convergentes qu'aux quantités positives et négatives ayant exclusivement des nombres entiers ou fractionnaires pour valeurs absolues.

54. Nous avons assigné des limites idéales à toutes les variantes convergentes qui n'en ont pas d'effectives (50, I). D'autre part, toute variante tendant vers une limite effective est convergente (48). Il en résulte que *la condition nécessaire et suffisante pour qu'une variante donnée* $v_{m,n,\ldots}$ *tende vers quelque limite commensurable ou incommensurable est qu'elle soit convergente, c'est-à-dire que la différence*

$$v_{m'',n'',\ldots} - v_{m',n',\ldots}$$

tende vers zéro, quand les entiers m', n', $\ldots$, m'', n'', $\ldots$ *augmentent tous indéfiniment d'une manière quelconque.*



CHAPITRE III.

SUITE DES DEUX PRÉCÉDENTS. — QUANTITÉS IMAGINAIRES.

Exécution des opérations rationnelles sur les quantités imaginaires.

55. Les théories algébriques pures, qui toutes impliquent la considération des polynômes entiers, de ceux principalement qui dépendent d'une seule variable, se simplifient et s'éclaircissent dans une mesure considérable, *quand ces derniers sont complètement résolubles en facteurs du premier degré*. Tant qu'on s'en tient aux quantités factices dont nous avons parlé jusqu'à présent, la possibilité d'une pareille résolution demeure fortuite; mais on la rend certaine et on s'en assure les bénéfices dans tous les cas, par un dernier pas fait dans la voie des fictions générales. Il consiste à substituer aux quantités positives et négatives, commensurables ou incommensurables, de nouveaux simulacres d'où l'on redescend encore à volonté et sans effort aux réalités du calcul vulgaire. D'ailleurs cette substitution n'est pas moins avantageuse dans l'Analyse infinitésimale, car tout son édifice a l'Algèbre pour premier fondement.

Telle est la cause de l'introduction des quantités imaginaires dans les spéculations analytiques. L'emploi de cet artifice, limité pendant longtemps aux questions de pure Algèbre, a été étendu pour ainsi dire de nos jours au reste de l'Analyse et il en a complètement renouvelé la face. C'est avec son aide qu'on a pu découvrir des analogies surprenantes entre les transcendantes usuelles trouvées comme au hasard les unes dans le cercle, les autres dans le calcul des exposants, achever la théorie des fonctions elliptiques et aborder celle des transcendantes plus élevées, qu'on a pu enfin, dans l'exposition des premiers principes eux-mêmes,

donner aux raisonnements, avec une élégance inespérée, une rigueur rendant désormais inutile la foi spéciale qu'ils exigeaient autrefois. Au point de vue mathématique, on pourrait donc dire avec justesse que nous sommes dans le siècle des quantités imaginaires. Il ne faudrait pas oublier cependant que leur étude n'est pas un *but* à avoir en vue pour lui-même; c'est un simple *moyen* dont on pourrait à la rigueur se passer complètement comme de la considération de toutes autres quantités fictives.

En reprenant les principes de cette théorie, nous procéderons synthétiquement pour abréger, sans nous arrêter à des considérations critiques ou historiques.

56. Nous considérons une *quantité imaginaire* comme constituée par la simple association, dans un ordre déterminé, de deux quantités quelconques a', a'' (positives ou négatives, commensurables ou incommensurables), que nous nommerons son *premier* et son *second élément*, et nous la représenterons provisoirement par le signe (a', a'').

I. Deux quantités imaginaires (a', a''), (b', b'') sont dites *égales*, si l'on a simultanément $a' = b'$, $a'' = b''$; et, pour exprimer ce fait, on écrit aussi $(a', a'') = (b', b'')$.

II. La *somme* $(a', a'') + (b', b'') + \dots$ de plusieurs quantités imaginaires données s'obtient en formant le couple

$$(a' + b' + \dots, a'' + b'' + \dots).$$

Elle est indépendante de l'ordre dans lequel on considère ses parties. La somme de m quantités toutes égales à (a', a'') se représentera par $m(a', a'')$.

III. La *différence* $(a', a'') - (b', b'')$ est la quantité imaginaire qu'il faut ajouter à son second terme pour reproduire le premier, c'est-à-dire $(a' - b', a'' - b'')$.

Elle est aussi bien la somme de (a', a'') et de $(-b', -b'')$, quantité qu'on dit quelquefois *opposée*, plus souvent *égale et de signe contraire* à (b', b''), et qu'on représente par $-(b', b'')$.

IV. Le *produit* de (a', a'') par (b', b'') se forme en prenant la quantité

$$(a'b' - a''b'', a'b'' + a''b');$$

il est en fait indépendant de l'ordre de ses *facteurs*.

Comme en Arithmétique, on multiplie les unes par les autres plus de deux quantités imaginaires en multipliant successivement par chacune d'elles le produit de celles considérées auparavant, et l'on démontre que leur produit est indépendant de l'ordre des facteurs.

Une *puissance* est de même un produit de facteurs tous égaux entre eux.

V. Le *quotient* de (A', A'') *divisée* par (a', a'') est la quantité imaginaire dont le produit par cette dernière est égal à la première. Ses éléments x', x'' s'obtiennent donc (IV) par la résolution des équations linéaires simultanées

$$\begin{cases} a'x' - a''x'' = A', \\ a''x' + a'x'' = A''. \end{cases}$$

Il y a trois cas à distinguer :

1° Si les éléments a', a'' du *diviseur* ne sont pas tous deux nuls, le déterminant $a'^2 + a''^2$ des coefficients des inconnues ne peut s'évanouir. Ce système d'équations est possible et déterminé, le quotient existe et a une valeur unique dont les éléments sont

$$x' = \frac{a'A' + a''A''}{a'^2 + a''^2}, \qquad x'' = \frac{a'A'' - a''A'}{a'^2 + a''^2}.$$

2° Si les éléments du diviseur sont tous deux nuls, sans qu'il en soit de même pour ceux du dividende, *la division est impossible*.

3° Si les éléments du diviseur s'évanouissent tous deux et ceux aussi du dividende, *le quotient est absolument indéterminé*.

57. Ces principes renferment virtuellement l'extension aux quantités imaginaires, de toutes les opérations rationnelles : formules de Cramer pour la résolution des équations linéaires, du Binôme pour le développement des puissances des polynômes, etc.; et, en représentant chaque quantité imaginaire par une seule

lettre, *toutes ces formules conservent exactement leur aspect extérieur*. Nous ne pouvons entrer dans les détails fastidieux de cette vérification, et nous devons nous contenter des observations suivantes qui sont les principales :

1° *Pour combiner plusieurs polynômes par voie d'addition et de soustraction, il suffit de changer les signes des termes des polynômes soustractifs, puis de les ajouter ensemble et avec ceux des polynômes additifs;* conséquence immédiate de la définition de l'addition, de la soustraction et des quantités opposées (56, II, III).

2° *Le résultat de la combinaison, par voie exclusive de multiplication ou de division, de quantités imaginaires en nombre quelconque, dont quelques-unes sont précédées du signe —, est égal à ce qu'il serait si l'on effaçait tous ces signes, pourvu que, s'ils sont en nombre impair, on affecte ce résultat du signe —.*

Cette extension de la *règle des signes* a pour cause ce fait, que les éléments d'un produit étant des fonctions linéaires et homogènes de ceux de chacun de ses facteurs considéré isolément (56, IV) changent tous deux de signes, quand ceux d'un seul facteur subissent cette modification; la substitution à un seul facteur, de sa quantité opposée, transforme donc aussi le produit en sa quantité opposée.

3° *On peut effectuer le produit de n polynômes donnés, en associant de toutes les manières possibles un terme du premier avec un terme du second, etc., et un terme du $n^{ième}$, faisant le produit de ces n termes, puis la somme de tous les semblables produits partiels.*

Soit d'abord à multiplier la quantité

$$(1) \qquad (A', A'')$$

par la somme

$$(2) \qquad (b'_1, b''_1) + (b'_2, b''_2) + \ldots + (b'_k, b''_k).$$

En posant

$$(3) \qquad \begin{cases} b'_1 + b'_2 + \ldots + b'_k = B', \\ b''_1 + b''_2 + \ldots + b''_k = B'', \end{cases}$$

B', **B''** seront les éléments de la somme, et l'on aura (56, IV) pour le produit cherché

$$(A'B' - A''B'', A'B'' + A''B').$$

Mais, comme les éléments de ce produit sont tous deux des fonctions linéaires et homogènes de B', B'', éléments de l'un de ses facteurs, en y remplaçant B', B'' par les premiers membres des égalités (3), une décomposition évidente mettra ce produit sous la forme

$$(A'b'_1 - A''b''_1, A'b''_1 + A''b'_1) + \ldots + (A'b'_k - A''b''_k, A'b''_k + A''b'_k).$$

En d'autres termes, si l'on désigne simplement par A, b_1, b_2, ..., b_k les quantités (1), (2), on aura bien

$$(4) \qquad A(b_1 + b_2 + \ldots + b_k) = Ab_1 + Ab_2 + \ldots + Ab_k.$$

Si maintenant A est une somme telle que

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_h,$$

on aura par ce qui précède

$$(5) \qquad \left\{ \begin{array}{l} Ab_1 = a_1 b_1 + a_2 b_1 + \ldots + a_h b_1, \\ Ab_2 = a_1 b_2 + a_2 b_2 + \ldots + a_h b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ Ab_k = a_1 b_k + a_2 b_k + \ldots + a_h b_k, \end{array} \right.$$

et, en combinant les égalités (4), (5), on mettra immédiatement le produit

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_h)(b_1 + b_2 + \ldots + b_k)$$

sous la forme indiquée par notre énoncé.

Du cas où il s'agit ainsi d'un produit de deux polynômes, on passera de même à ceux où il y a à en considérer 3, 4, ..., n, en supposant successivement que A représente le produit de 2, 3, ... $(n-1)$ polynômes.

58. Toutes les généralités des nos 27 *et suiv.* sur les *variables indépendantes, les fonctions rationnelles, irrationnelles ou transcendantes, les équations, etc.*, s'appliquent textuellement aussi aux quantités imaginaires, et nous ne croyons pas utile de le signaler autrement.

59. Nous avons bien donné à deux quantités imaginaires opposées la qualification d'*égales et de signes contraires* (**56**, III), mais cela dans un sens essentiellement *relatif* et *figuré*. Quant à la notion de signe *absolu,* elle n'est pas applicable aux quantités de cette espèce, celle non plus de grandeur ou de petitesse relative qui naît de la constatation des signes de leurs différences. Néanmoins, on a très souvent à faire entre elles, à ce point de vue, une sorte de comparaison vague résultant de la considération d'un troisième élément très important dont nous allons maintenant parler.

On nomme *module* de la quantité imaginaire $a = (a', a'')$ et l'on représente souvent par la notation $\operatorname{mod} a$, la racine carrée arithmétique (positive) (**52**)

$$\sqrt{a'^2 + a''^2}$$

de la somme des carrés de ses deux éléments. Nous avons déjà vu le carré du module du diviseur jouer un rôle important dans la discussion du problème de la division (**56**, V).

Le module est ainsi supérieur, égal au moins, à la plus grande des valeurs absolues des deux éléments.

La nullité simultanée des deux éléments entraîne celle du module, c'est évident. Réciproquement, *cette dernière nullité entraîne les deux premières*. Car si $\operatorname{mod} a$ est nul, son carré $a'^2 + a''^2$ l'est aussi, a'^2 et a''^2 également, qui sont des quantités essentiellement positives, et, par suite, a', a''.

Deux quantités opposées ont des modules égaux. Car leurs éléments étant respectivement égaux et de signes contraires, les sommes de leurs carrés sont égales ainsi que leurs racines carrées positives.

60. Entre les modules des résultats des opérations élémentaires, et les résultats d'opérations homonymes exécutées sur les modules des quantités imaginaires intéressées dans ces opérations, il existe des relations importantes à noter.

En appelant a, b *deux quantités imaginaires quelconques,* α, β *leurs modules et* $\overline{\alpha - \beta}$ *la valeur absolue de la différence* $\alpha - \beta$, *on a la double inégalité*

$$\overline{\alpha - \beta} \leqq \operatorname{mod}(a + b) \leqq \alpha + \beta. \tag{6}$$

Si a', a'', b', b'' sont les éléments de a, b, le carré de $\operatorname{mod}(a+b)$ est

$$\begin{aligned}(a'+b')^2+(a''+b'')^2 &= a'^2+a''^2+b'^2+b''^2+2(a'b'+a''b'')\\ &= \alpha^2+\beta^2\pm 2\sqrt{\alpha^2\beta^2-(a'b''-a''b')^2},\end{aligned}$$

à cause de l'égalité évidente

$$(a'b'+a''b'')^2+(a'b''-a''b')^2=(a'^2+a''^2)(b'^2+b''^2)=\alpha^2\beta^2,$$

et en plaçant bien entendu devant le radical celui des deux signes qui rend le dernier terme égal à $2(a'b'+a''b'')$.

Comme $(a'b''-a''b')^2$ est une quantité essentiellement nulle ou positive, la quantité placée sous le radical ne peut surpasser $\alpha^2\beta^2$, et, par suite, la valeur absolue du dernier terme ne peut surpasser $2\alpha\beta$.

Le carré de $\operatorname{mod}(a+b)$ ne peut donc être inférieur à

$$\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta=\overline{\alpha-\beta}^{\,2},$$

ni supérieur à

$$\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta=(\alpha+\beta)^2,$$

ce qui revient à ce que nous voulions prouver.

61. Pour avoir précisément

$$\operatorname{mod}(a+b)=\alpha+\beta, \tag{7}$$

il faut évidemment et il suffit que l'on ait l'égalité

$$a'b''-a''b'=0$$

et l'inégalité

$$a'b'+a''b''\geqq 0.$$

Ces conditions sont satisfaites, quand l'une des quantités a, b a ses deux éléments nuls, ou bien, quand soit leurs premiers, soit leurs seconds éléments s'évanouissent en même temps, et que les autres sont des quantités de même signe.

Quand aucun de leurs éléments ne se réduit à zéro, la multiplication de l'égalité par $b'b''$ donne

$$a'b'.b''^2-a''b''.b'^2=0,$$

en vertu de quoi les produits $a'b'$, $a''b''$ ont un même signe qui est + à cause de l'inégalité. *Les éléments d'un même nom sont donc d'un même signe et de plus proportionnels à ceux de l'autre nom,* car la même égalité donne encore

$$\frac{a'}{a''} = \frac{b'}{b''}.$$

62. *Pour la somme de quantités imaginaires a, b, c, ..., l en nombre quelconque, on a plus généralement*

$$(8)\quad \operatorname{mod}(a+b+c+\ldots+l) \leqq \operatorname{mod} a + \operatorname{mod} b + \operatorname{mod} c + \ldots + \operatorname{mod} l.$$

Car la dernière des inégalités (6) donne successivement les suivantes

$$(9)\quad \left\{\begin{array}{l} \operatorname{mod}(a+b) \leqq \operatorname{mod} a + \operatorname{mod} b, \\ \operatorname{mod}[(a+b)+c] \leqq \operatorname{mod}(a+b) + \operatorname{mod} c, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \operatorname{mod}[(a+b+c+\ldots)+l] \leqq \operatorname{mod}(a+b+c+\ldots) + \operatorname{mod} l, \end{array}\right.$$

dont l'addition membre à membre conduit à celle qu'il fallait établir.

Pour que la relation (8) ait lieu avec le signe =, il est nécessaire et suffisant qu'il en soit ainsi pour chacune des relations (9) d'où nous l'avons déduite. En ayant égard à ce que nous avons dit ci-dessus (61), on obtient facilement la condition suivante : *En faisant abstraction de celles des quantités proposées qui ont des éléments tous deux nuls, les autres doivent avoir soit leurs éléments d'un même nom tous nuls et ceux de l'autre nom de même signe, soit leurs éléments de chaque nom tous de même signe et proportionnels à ceux de l'autre nom.*

63. *En conservant les notations du n° 60, on a aussi*

$$\overline{\alpha - \beta} \leqq \operatorname{mod}(a-b) \leqq \alpha + \beta.$$

On déduit immédiatement cette relation de celle qui a été démontrée au numéro cité, en remarquant que l'on a

$$a - b = a + (-b)$$

et

$$\operatorname{mod}(-b) = \operatorname{mod} b = \beta.$$

L'égalité

$$\operatorname{mod}(a - b) = \bar{\alpha} - \bar{\beta}$$

exige la condition trouvée au n° 61 pour l'égalité (7), à cela près que les éléments auxquels elle imposait un même signe *doivent avoir ici des signes contraires.*

64. *Le module d'un produit est égal au produit de ceux de ses facteurs.*

Pour deux facteurs seulement (a', a''), (b', b''), le point en question résulte de l'identité évidente

$$(a'b' - a''b'')^2 + (a'b'' + a''b')^2 = (a'^2 + a''^2)(b'^2 + b''^2),$$

qui donne par l'extraction des racines carrées positives

$$\operatorname{mod}[(a', a'')(b', b'')] = \operatorname{mod}(a', a'')\operatorname{mod}(b', b'').$$

Après quoi, on passe sans difficulté au cas du produit de facteurs en nombre quelconque.

65. *Le module du quotient d'une division (possible) est égal au quotient de celui du dividende divisé par celui du diviseur.* C'est une conséquence évidente de ce qui précède.

66. On notera cette observation générale évidente : *Quand une expression est entière, c'est-à-dire quand son calcul comporte exclusivement des additions, soustractions et multiplications, son module ne peut surpasser le résultat obtenu en y substituant partout le signe + au signe —, et les modules des quantités sur lesquelles on doit opérer à ces quantités elles-mêmes.*

67. Quelquefois, quoique assez rarement, on a à considérer deux quantités imaginaires telles que (a', a''), $(a', -a'')$ ayant leurs éléments, les premiers égaux, les seconds égaux numériquement, mais de signes contraires; on les dit *conjuguées. Leurs modules sont évidemment égaux.*

Une quantité imaginaire se confond avec sa conjuguée, quand son second élément s'évanouit; sinon elle ne peut lui être égale.

Si, dans une expression rationnelle quelconque, on remplace chaque quantité imaginaire y figurant par sa conjuguée, sa valeur se transforme simultanément en sa conjuguée.

L'exactitude de cet énoncé se vérifie directement pour le résultat de chacune des opérations élémentaires définies au n° 56. Elle est donc générale, puisque tout calcul rationnel est décomposable en opérations élémentaires.

Mécanisme de la substitution de quantités imaginaires aux quantités positives et négatives.

68. Le résultat de calculs arithmétiques quelconques exécutés sur des nombres absolus est précisément la valeur numérique du résultat des calculs factices homonymes exécutés sur les quantités positives qui ont ces nombres absolus pour valeurs numériques (25). D'où l'assimilation constante faite entre ces objets de natures pourtant si dissemblables, pour bénéficier des avantages rappelés au numéro cité.

Même chose se passe pour les quantités positives et négatives relativement aux quantités imaginaires, en vertu de l'observation suivante dont l'exactitude est générale, parce qu'elle se vérifie immédiatement pour les diverses opérations fondamentales définies dans le paragraphe précédent :

En exécutant un calcul quelconque sur des quantités imaginaires dont les seconds éléments sont tous nuls, on obtient un résultat dont le second élément est nul aussi, et dont le premier est le résultat du calcul algébrique ordinaire de même nature exécuté sur les premiers éléments des quantités imaginaires considérées.

Il en résulte immédiatement que, *pour obtenir le résultat d'un calcul algébrique ordinaire à exécuter sur des quantités positives ou négatives données a', b', c', ..., on peut aussi bien, si l'on y trouve intérêt, instituer le même calcul (imaginaire) sur les quantités imaginaires $(a', 0)$, $(b', 0)$, $(c', 0)$, ..., substituées à a', b', c', ..., puis prendre le premier élément de son résultat.*

C'est précisément ce que l'on fait en raisonnant exclusivement

sur des quantités imaginaires dont le calcul renferme ainsi comme cas particulier tout celui des quantités positives et négatives; et, en procédant de cette manière, on obtient le résultat poursuivi, de ne jamais être arrêté dans une transformation analytique par l'impossibilité de décomposer les polynômes entiers à une seule variable en facteurs linéaires (55), parce que *tout polynôme de cette espèce, quand il ne dépend que de quantités imaginaires, est toujours susceptible d'une semblable décomposition*. Nous le ferons voir dans la deuxième Partie de cet Ouvrage, en prouvant l'existence constante de quelque racine pour toute équation dont le premier membre se réduit à un semblable polynôme.

Mais ce ne sont pas les polynômes *ordinaires* qu'on résout en facteurs linéaires ordinaires; cette opération n'est pas toujours possible, ou en facteurs imaginaires : ces mots n'auraient pas de sens, CE SONT LES POLYNÔMES IMAGINAIRES QUI LEUR SONT AINSI TACITEMENT SUBSTITUÉS. En n'insistant pas promptement sur cette distinction, la plupart des auteurs rendent la théorie des quantités imaginaires presque inintelligible.

69. On donne le nom de *réelles* aux quantités imaginaires dont les seconds éléments sont nuls et qui sont ainsi assimilables aux quantités positives et négatives. Ces dernières sont dites aussi *réelles* pour opposer leur nature spéciale à celle des quantités imaginaires; il en résulte ainsi, pour le sens de ce mot, une ambiguïté contre laquelle il faut se tenir en garde, sous peine de ne pas bien comprendre ce que l'on fait, mais qui cesse bientôt d'avoir des inconvénients. Dans la notation et dans le langage, on confond sans cesse une quantité réelle, simple variété de quantité imaginaire, avec son premier élément, quantité essentiellement algébrique, c'est-à-dire positive ou négative; ceci fixe le sens à attacher aux expressions impliquant à la fois des quantités imaginaires, des quantités positives ou négatives, et fournit en même temps les moyens d'en opérer le calcul. Les nombres absolus y jouent naturellement le rôle de quantités positives.

Le module d'une quantité réelle se réduit à sa valeur numérique.

Pour ajouter à une quantité imaginaire ou pour en retrancher une quantité réelle, il suffit d'ajouter à son premier élé-

ment ou d'en retrancher la quantité réelle considérée (c'est-à-dire la quantité positive ou négative dont elle tient la place).

Pour multiplier ou diviser une quantité imaginaire par une quantité réelle, il suffit d'en multiplier ou d'en diviser par elle les deux éléments à la fois.

Le résultat a pour module le produit ou le quotient de celui de la quantité imaginaire par la valeur numérique de la quantité réelle.

70. L'assimilation d'une quantité réelle à la quantité positive ou négative qui lui sert de premier élément entraîne l'assimilation au zéro algébrique de la quantité imaginaire dont les deux éléments sont nuls.

Ainsi donc *une quantité imaginaire est nulle, quand ses éléments le sont tous les deux.*

Quand une quantité imaginaire est nulle, son module l'est aussi et réciproquement (59).

71. *Pour qu'un produit soit nul, il est nécessaire et suffisant que l'un de ses facteurs au moins le soit.*

Si le produit est nul, son module l'est en même temps (70) et par suite aussi le produit des modules des facteurs qui lui est égal (64). Donc l'un de ces modules au moins est nul, ce qui entraîne la nullité de la quantité correspondante.

Si l'un des facteurs du produit considéré est nul, son module l'est aussi, ce qui entraîne la nullité du produit des modules des facteurs, puis celle du module du produit, puis enfin celle du produit lui-même.

72. Si α désigne le module d'une quantité imaginaire a non nulle, le quotient $\frac{a}{\alpha}$ a 1 pour module, et, comme on a inversement $a = \alpha \frac{a}{\alpha}$, *toute quantité imaginaire peut être considérée comme étant le produit de son module par quelque quantité de module* 1.

Cette dernière $\frac{a}{\alpha}$, dont la considération n'est pas sans utilité, est ce que Cauchy a nommé la *clef* de a.

Le produit, le quotient de deux clefs est encore une clef; et de même, plus généralement, pour un monôme rationnel, mais de coefficient 1, par rapport à plusieurs clefs.

73. *Le produit de deux quantités imaginaires conjuguées se réduit au carré de leur module commun* (67).

Il vient immédiatement en effet

$$(a', a'')(a', -a'') = (a'^2 + a''^2, 0).$$

Or nous sommes convenu de regarder comme indistincts

$$(a'^2 + a''^2, 0) \quad \text{et} \quad a'^2 + a''^2.$$

Réciproquement, *deux quantités imaginaires sont nécessairement conjuguées, quand elles ont un même module dont le carré est égal à leur produit.* Car, si l'on a

$$(a', a'')(b', b'') = a'^2 + a''^2 = (a', a'')(a', -a''),$$

avec (a', a'') non $= 0$, il vient, en divisant tout par (a', a'')

$$(b', b'') = (a', -a'').$$

Si $(a', a'') = 0$, (b', b'') est nulle aussi à cause de l'égalité des modules, et ces deux quantités sont encore conjuguées.

74. *Si dans un calcul quelconque exécuté sur des quantités réelles et sur des quantités imaginaires, on remplace ces dernières par leurs conjuguées, le résultat primitif se change aussi en son conjugué.*

Car une quantité réelle se confondant avec sa conjuguée (67), (69), les choses se passent comme si l'on substituait leurs conjuguées à toutes les quantités impliquées dans le calcul en question, sans distinction entre celles qui sont réelles et celles qui ne le sont pas (67).

75. Habituellement et quand il y a lieu, on met en évidence d'une manière spéciale les éléments d'une quantité imaginaire donnée $a = (a', a'')$. D'après ce que nous avons dit sur la combi-

naison des quantités réelles et des quantités imaginaires (69), on a immédiatement

$$(a', a'') = (a', 0) + (0, a'') = a' + a''(0, 1) = a' + ia'',$$

en convenant une fois pour toutes de désigner par i la clef imaginaire (0, 1) (72). En conséquence, on nomme, dans la quantité imaginaire a, *partie réelle* et *coefficient de i* les quantités réelles a', a'' que nous avons appelées jusqu'ici son premier et son second élément.

Il est clair inversement, toujours en restant fidèle à l'ensemble de nos conventions, que, a', a'' désignant deux quantités réelles quelconques, $a' + ia''$ se confond avec (a', a'').

76. Cette considération conduit à de nouveaux mécanismes pour obtenir les éléments du résultat d'un calcul rationnel à opérer sur des quantités imaginaires a, b, c, ...

Ce même calcul exécuté sur les binômes équivalents $a' + ia''$, $b' + ib''$, $c' + ic''$, ... conduira, s'il ne comporte aucune division, à un certain polynôme entier en i

$$(1) \qquad h_0 + h_1 i + h_2 i^2 + \ldots + h_k i^k$$

dont tous les coefficients h_0, h_1, ..., h_k sont des quantités positives ou négatives.

Cela posé, on trouvera facilement

$$(2) \qquad i^2 = (-1, 0) = -1$$

puisqu'on identifie $(-1, 0)$ à -1, puis

$$i^3 = -i, \qquad i^4 = 1, \qquad i^5 = i, \qquad \ldots,$$

plus généralement

$$(3) \qquad i^n = 1, \qquad \text{ou } i, \qquad \text{ou } -1, \qquad \text{ou } -i,$$

selon que l'exposant n divisé par 4 donne pour reste 0, ou 1, ou 2, ou 3. Si donc on fait les substitutions (3) dans le polynôme (1), sa réduction lui donnera la forme

$$H' + iH'',$$

où H', H'' sont des quantités positives ou négatives évidemment égales aux éléments du résultat cherché.

On peut obtenir d'une manière analogue les éléments du quotient d'une division, en faisant intervenir la quantité conjuguée du diviseur. On a effectivement

$$\frac{A' + iA''}{a' + ia''} = \frac{(A' + iA'')(a' - ia'')}{(a' + ia'')(a' - ia'')} = \frac{a'A' + a''A''}{a'^2 + a''^2} + i\frac{a'A'' - a''A'}{a'^2 + a''^2}.$$

C'est en procédant ainsi, et d'une manière empirique, que les anciens géomètres se sont élevés presque inconsciemment à la conception générale des quantités imaginaires dont ils prenaient pour type $a' + a''\sqrt{-1}$.

Mais on a fait longtemps de vains efforts pour pénétrer le sens du signe $\sqrt{-1}$ qui effectivement n'en a aucun, parce qu'une quantité négative n'a point de racine carrée. Notre signe i représente bien, en vertu de la relation (2), une racine carrée de -1, *mais de* -1 *écrit par convention expresse à la place de la quantité imaginaire* $(-1, 0)$, ce qui est tout différent.

Ajoutons que -1 (considéré comme quantité imaginaire) a deux racines carrées, savoir $(0, 1)$ et $(0, -1)$, que le signe $\sqrt{-1}$ ne saurait représenter sans ambiguïté. La lettre i désigne la première, celle dont le second élément est positif.

Variantes imaginaires.

77. Une *variante imaginaire* $v_{m,n,\ldots}$ aux indices m, n, ..., est la quantité qui a pour éléments deux variantes ordinaires $v'_{m,n,\ldots}$, $v''_{m,n,\ldots}$ dépendant des mêmes indices (34).

On la dit *finie*, de *petitesse limitée* ou *infiniment petite*, selon que ses deux éléments à la fois jouissent de l'une ou l'autre de ces propriétés (35), (36).

D'après cela, il est évident que *le module d'une variante est, en même temps qu'elle, fini, de petitesse limitée ou infiniment petit.*

78. On dit que la variante $v_{m,n,\ldots} = (v'_{m,n,\ldots}, v''_{m,n,\ldots})$ *tend vers*

la limite $V = (V', V'')$ quand on a simultanément

$$\lim v'_{m,n,\dots} = V', \qquad \lim v''_{m,n,\dots} = V'',$$

ou bien, ce qui revient au même, *quand la différence*

$$V - v_{m,n,\dots} = (V' - v'_{m,n,\dots},\ V'' - v''_{m,n,\dots})$$

est infiniment petite (77).

Toute quantité infiniment petite tend ainsi vers zéro.

La condition pour que $v_{m,n,\dots}$ tende vers quelque limite est donc que les différences

$$v'_{m_2,n_2,\dots} - v'_{m_1,n_1,\dots}, \quad v''_{m_2,n_2,\dots} - v''_{m_1,n_1,\dots}$$

soient l'une et l'autre infiniment petites pour des valeurs toutes infinies des indices m_1, n_1, ..., m_2, n_2, ... (54), c'est-à-dire, comme s'il s'agissait d'une variante réelle, *que la différence*

$$v_{m_2,n_2,\dots} - v_{m_1,n_1,\dots}$$

soit infiniment petite dans les mêmes circonstances.

79. *Si l'on a*

$$\lim v = V,$$

on a aussi

$$\lim(\operatorname{mod} v) = \operatorname{mod} V.$$

Car la différence $\operatorname{mod} V - \operatorname{mod} v$, ne surpassant pas numériquement $\operatorname{mod}(V - v)$ (63), est infiniment petite comme ce dernier module qui est supposé l'être.

80. *Les remarques énoncées au n° 37 sont textuellement applicables aux variantes imaginaires :*

1° Parce que le module d'une fonction entière de plusieurs quantités imaginaires est inférieur à la valeur qu'acquiert cette fonction quand on y remplace tous ses signes — par des signes +, et les quantités dont elle dépend, par des quantités positives, égales ou supérieures à leurs modules (66); parce que le module d'un quotient est inférieur au quotient de deux quantités positives,

la première supérieure au module du dividende, la seconde inférieure à celui du diviseur (65).

2° Pour les mêmes raisons.

81. En utilisant ces remarques et en raisonnant suivant les indications du n° 49, on étendra sans peine aux quantités imaginaires le théorème dont l'énoncé s'y trouve et que nous croyons devoir reproduire à cause de son importance capitale.

Si les variantes u, v, w, ... tendent vers les limites U, V, W, ... *respectivement, et si* $f(u, v, w, \ldots)$ *désigne une fonction de ces variantes soit entière, soit fractionnaire, mais n'ayant pas un dénominateur tendant vers zéro, on a*

$$\lim f(u, v, w, \ldots) = f(\mathrm{U}, \mathrm{V}, \mathrm{W}, \ldots).$$

82. Une variante imaginaire dont le module est infini (46), ce qui a lieu par exemple quand quelqu'un de ses éléments est infini, se nomme aussi une *quantité infinie.*

Pour des raisons analogues à celles qui ont été invoquées au n° 80, les observations finales du n° 46 sont littéralement applicables aux quantités imaginaires infinies.

Notation graphique des quantités imaginaires.

83. La conception simultanée des deux éléments a', a'' et du module d'une quantité imaginaire a présente quelques difficultés, surtout quand elle varie ; on les a supprimées de la manière la plus heureuse par la considération du point qui a pour abscisse a' et pour ordonnée a'' relativement à deux axes de coordonnées rectilignes rectangulaires OX$'$, OX$''$ tracés dans un même plan. La position de ce point donne non seulement par ses coordonnées les éléments de a, mais encore par sa distance à l'origine le module de cette quantité ; aussi on l'identifie en quelque sorte avec elle en lui donnant le même nom et en le désignant par la même lettre.

Les quantités réelles positives ou négatives sont représentées par des points situés sur les parties de mêmes noms respectivement de OX$'$, axe des *premiers éléments,* et le zéro imaginaire par

l'origine O. Les points situés sur l'axe OX″ *des seconds éléments* correspondent aux quantités dont le premier élément est nul.

Deux quantités (c'est-à-dire les points correspondants) sont symétriques : par rapport à l'origine quand elles sont opposées (56, III), par rapport à l'axe des premiers éléments quand elles sont conjuguées (67).

84. D'après la définition de l'addition et de la soustraction (56), le point correspondant à la somme $a + b + \ldots + l$ est l'extrémité d'une ligne brisée commençant à l'origine et ayant des côtés égaux et directement parallèles aux *rayons vecteurs* Oa, Ob, ..., Ol placés dans un ordre quelconque.

Celui qui correspond à la différence $a - b$, est l'extrémité d'une semblable ligne brisée formée par deux côtés toujours parallèles aux segments rectilignes Oa, Ob, mais le premier directement, le second inversement.

Ces représentations géométriques de l'addition et de la soustraction, combinées avec les propriétés des polygones plans, font retrouver immédiatement les propriétés du module d'une somme ou d'une différence (60 *et suiv.*).

85. Le point a représente évidemment la différence $a - b$, si, par simple translation, on amène le système des axes coordonnés à avoir son origine en b, c'est-à-dire si l'on rapporte a à ces nouveaux axes.

En particulier, $\text{mod}(a - b)$ est représenté graphiquement par la longueur du segment rectiligne allant de b à a. Nous aurons bien souvent à utiliser ces deux observations.

86. La clef de a (72) est représentée géométriquement par la trace du rayon vecteur Oa indéfiniment prolongé, sur la circonférence de rayon 1 qui a l'origine pour centre.

Le produit de la quantité quelconque $a = a' + ia''$ par une clef $\theta = \theta' + i\theta''$ a pour éléments $\theta' a' - \theta'' a''$ et $\theta' a'' + \theta'' a'$, c'est-à-dire, en vertu des formules pour la transformation des coordonnées rectangulaires, *les coordonnées par rapport aux axes* OX′, OX″, *du point ayant* a', a'' *pour coordonnées relativement à ce qu'ils deviennent après une rotation autour de l'origine ame-*

nant OX′ *à coïncider avec le rayon vecteur* Oθ *en position et en direction.*

Ainsi donc, *la multiplication de a par la clef* θ *a pour effet graphique une simple rotation de a autour de l'origine, de mêmes sens et amplitude que celle à imprimer à l'axe* OX′ *pour l'amener à passer par le point* θ.

D'autre part, *on multipliera évidemment a par une quantité positive* τ *en multipliant simplement son module par* τ *sans changer la direction de son rayon vecteur*. En considérant donc un multiplicateur quelconque t comme le produit de son module τ par sa clef θ, la combinaison de ces observations fournira facilement le point correspondant au produit at.

Il en résulte inversement pour la division une représentation graphique assez évidente pour qu'il nous soit inutile de la développer.

87. Quand une quantité imaginaire a varie, le point correspondant se déplace. En particulier, si un seul des éléments de a change de valeur, ce point se meut sur une droite située parallèlement à l'axe de même nom et à une distance égale à la valeur constante de l'autre élément. Si, en variant, les éléments de a restent proportionnels à deux constantes, le même point se meut sur quelque droite passant par l'origine. Si mod$a$ conserve une valeur constante r, ce mouvement s'effectue sur une circonférence décrite de l'origine comme centre avec r pour rayon, etc.

88. Quand une variante v est finie ou de petitesse limitée, son module reste inférieur dans le premier cas, supérieur dans le second, à quelque quantité positive R. Par suite, le point correspondant se meut dans le premier cas à l'*intérieur*, dans le second à l'*extérieur* d'un cercle de rayon R, ayant l'origine pour centre.

Quand elle tend vers une limite V, la distance des points v, V mesurée par mod(V — v) (85) est alors infiniment petite; dans son mouvement, le point v se rapproche donc indéfiniment du point fixe V, en particulier de l'origine si v est infiniment petite.

Si v est infinie, mod$v$ l'est par définition, et le mouvement du point v est de nature telle, qu'il s'éloigne indéfiniment de l'origine et même de tout autre point fixe.

89. Les limites entre lesquelles doivent se maintenir les éléments d'une variable indépendante x pour que telle ou telle circonstance se réalise sont précisées habituellement par l'indication d'une *aire* à l'intérieur ou à l'extérieur de laquelle doit rester le point correspondant x. Souvent cette aire n'est pas dépourvue de toute solution de continuité comme celles des triangles, rectangles, cercles, ellipses, etc., mais elle est *perforée* en une ou plusieurs de ses régions, de manière à offrir par exemple l'apparence d'une couronne limitée par deux circonférences concentriques de rayons inégaux, ou bien de l'espace à la fois intérieur à un cercle mais extérieur à d'autres cercles plus petits qui sont à la fois intérieurs au premier et extérieurs les uns aux autres, etc.

Quoi qu'il en soit, nous dirons qu'une aire de cette espèce est *limitée* quand la distance de deux quelconques de ses points y demeure finie, *illimitée* quand cette distance y peut croître au delà de toute limite.

Nous appellerons quelquefois *dimension* d'une aire limitée, la valeur maximum qu'y peut atteindre la distance de deux de ses points, ou, ce qui revient au même (85), le module maximum de la différence de deux valeurs de x tombant l'une et l'autre dans son intérieur.

90. Dans chaque question comportant la considération de plusieurs variables indépendantes $x, y, z, \ldots$, il faut, en général, noter graphiquement leurs valeurs par des points $x, y, z, \ldots$ rapportés à autant de systèmes d'axes coordonnés rectangulaires d'origines $O_x, O_y, O_z, \ldots$, tracés dans des plans *différents*.

91. Nous aurons occasion d'utiliser la remarque suivante :

Quand les valeurs de plusieurs variantes $u, v, \ldots, w$ *associées en système tombent sans cesse dans des aires limitées* S_u, $S_v, \ldots, S_w$ *respectivement, on peut extraire de la suite indéfinie des systèmes de leurs valeurs, une autre suite indéfinie de systèmes composés exclusivement de variantes qui toutes sont pourvues de limites.*

Supposons d'abord que le système soit composé d'une seule variante v tombant sans cesse dans l'aire limitée S, et soient

$$\varepsilon_1, \quad \varepsilon_2, \quad \ldots, \quad \varepsilon_m, \quad \ldots,$$

la suite des valeurs d'une variante positive infiniment petite. On peut évidemment partager l'aire S en un nombre limité de fragments de dimensions inférieures à ε_1, et, dans l'un au moins de ces fragments S_1, tomberont une suite illimitée de valeurs de v, sans quoi le nombre total de ces valeurs serait limité.

En raisonnant sur cette suite partielle illimitée, sur S_1 et ε_2, comme nous venons de le faire sur la suite générale des valeurs de v, sur S et ε_1, puis toujours de la même manière, on formera une suite indéfinie d'aires partielles

$$(1) \qquad S_1, \quad S_2, \quad \ldots, \quad S_m, \quad \ldots,$$

jouissant de cette double propriété, que chacune d'elles est un simple fragment de la précédente, et par suite de l'une quelconque de celles venant avant celle-ci, qu'elle contient un nombre illimité de valeurs de v et que celle d'indice m est de dimension inférieure à ε_m.

Cela posé, appelons

$$v_1, \quad v_2, \quad \ldots, \quad v_m, \quad \ldots$$

des valeurs de v choisies dans l'ordre de leur succession, de manière à tomber toutes dans les aires emboîtées (1) respectivement. Le terme général de cette suite tend nécessairement vers une certaine limite, car, en appelant m' le plus petit des entiers infinis m', m'', les points $v_{m'}$, $v_{m''}$ tombent tous deux dans l'aire $S_{m'}$, d'où, par suite,

$$\operatorname{mod}(v_{m''} - v_{m'}) < \varepsilon_{m'}, \qquad \lim(v_{m''} - v_{m'}) = 0 \ (78).$$

Si le système considéré est composé de deux variantes u, v, le raisonnement ci-dessus permet d'extraire de la suite de ses états successifs une suite partielle où les valeurs de u ont une limite, puis de celle-ci une autre suite partielle où v aura aussi une limite. Et de même dans tout autre cas.

92. Cauchy appelait *affixe* d'un point la quantité imaginaire dont il constitue la notation graphique, *origine et plan des affixes* l'origine et le plan des axes auxquels le point en question doit être rapporté. Ces dénominations sont peu usitées.

On s'est appliqué à faciliter et à justifier la conception des quan-

tités imaginaires par des considérations géométriques, et Cauchy en a basé une théorie complète sur la Géométrie plane. Si quelques tracés géométriques fournissent pour ces quantités des notations très commodes (dont au surplus on pourrait à la rigueur se passer), il n'en résulte pas, tant s'en faut selon nous, qu'il y ait plus de rapports entre ces deux sortes de choses qu'entre un phénomène quelconque, statistique ou autre, et la courbe qui en fournit une image optique.

92 *bis*. Sur le papier où on les trace, la disposition relative d'axes tels que OX′, OX″ (83) est indifférente. Mais, pour pouvoir bien préciser certains détails, *nous supposerons toujours qu'un observateur regardant l'origine, d'un point de la partie positive de* OX′, *voit celle de* OX″ *à sa droite*. Par exemple, la partie positive de OX′ sera comme d'usage dirigée de gauche à droite, et celle de OX″ dirigée de bas en haut.

CHAPITRE IV.

SÉRIES EN GÉNÉRAL.

Définitions et premières propriétés.

93. Les séries offrent pour nous un intérêt majeur, parce que nous aurons prochainement à parler d'une manière à peu près continuelle des séries entières (Chap. V, *inf.*) qui en forment une classe extrêmement vaste, et il faut nous livrer à une étude soigneuse de leurs propriétés générales.

Une *série* est un ensemble illimité de quantités se formant successivement suivant quelque loi donnée, qu'on nomme ses *termes* et qu'on somme en nombre indéfiniment croissant pour former une variante d'une nature spéciale.

Le terme *général* d'une série est lui-même une variante à un ou plusieurs indices pouvant quelquefois prendre des valeurs négatives; mais le cas d'un indice unique à valeurs positives est le plus simple; tous les autres s'y ramènent pour ainsi dire immédiatement, et nous nous y placerons pour faire nos premiers raisonnements.

94. Une pareille série ayant pour termes

$$u_1,\quad u_2,\quad \ldots,\quad u_n,\quad \ldots$$

est dite *convergente,* quand la variante S_n obtenue en prenant la somme

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n$$

de ses n premiers termes l'est elle-même (38), ou bien, pour parler le langage ordinaire, quand S_n tend vers quelque limite pour n infini. Cette limite S se représente par la notation

$$(1)\qquad u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

et se nomme la *somme* de la série. Mais, malgré l'identité des mots, c'est en réalité la *limite d'une somme de quantités en nombre croissant,* chose bien différente d'une somme proprement dite; on s'exposerait donc à de graves erreurs en croyant que, relativement à ses termes, la somme d'une série jouit toujours des mêmes propriétés que s'il s'agissait d'un polynôme véritable.

La différence $S - S_n$, qui tend alors vers zéro pour n infini, est évidemment la somme de cette autre série également convergente

$$u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots$$

que laisse la suppression des n premiers termes de la proposée; on la nomme le *reste* de celle-ci *arrêtée* à son terme de rang n.

Une série est *divergente* quand elle n'est pas convergente; elle n'a alors ni somme ni reste.

On dit quelquefois qu'une série divergente a une *somme infinie* quand pour elle la variante S_n est infinie (82).

95. En appelant u'_n, u''_n les éléments de u_n, et posant

$$S'_n = u'_1 + u'_2 + \ldots + u'_n, \qquad S''_n = u''_1 + u''_2 + \ldots + u''_n,$$

on a évidemment

$$S_n = (S'_n, S''_n);$$

il en résulte (78) qu'*une série est convergente ou divergente selon que celles formées par les éléments de ses termes sont ou non toutes deux convergentes, et aussi que dans le premier cas la somme de la série a pour éléments les sommes de ces deux dernières.*

Cette remarque ramène ainsi l'étude et la sommation d'une série quelconque à celles de deux séries à termes réels; mais elle est bien rarement appliquée.

96. Comme nous l'avons dit en parlant d'une variante quelconque (78), il faut, pour savoir si la série (1) est convergente ou divergente, étudier pour n infini la différence $S_{n+p} - S_n$, qui est représentée ici par

$$S_{n,p} = u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+p},$$

somme des p termes qui suivent le $n^{\text{ième}}$. Il y a convergence, quand cette somme est infiniment petite indépendamment de toute relation entre p et n; il y a divergence, quand une relation de cette espèce peut laisser son module supérieur à quelque quantité positive invariable.

La discussion *directe* de cette somme offrirait en général de sérieuses difficultés, et on l'étudie habituellement en la comparant avec ce qu'elle est pour quelque série de nature connue. Si, par exemple, on finit par avoir, quels que soient n et p,

$$\operatorname{mod} S_{n,p} < \operatorname{mod} S'_{n,p}$$

et si la série à laquelle $S'_{n,p}$ appartient est convergente, la proposée ne peut manquer de l'être aussi. Elle serait au contraire divergente, si l'autre l'était et qu'on eût finalement

$$\operatorname{mod} S_{n,p} > \operatorname{mod} S'_{n,p}.$$

C'est en procédant ainsi de proche en proche à partir d'un très petit nombre de séries étudiées directement, qu'ont été obtenues la plupart des règles de convergence et de divergence.

Il est clair que dans la discussion d'une série on peut faire abstraction d'un nombre quelconque de ses premiers termes.

97. Voici quelques applications de ces principes, limitées aux faits qu'il nous sera utile de connaître.

Pour qu'une série soit convergente, il est nécessaire que son terme général soit infiniment petit.

Effectivement, $u_{n+1} = S_{n,1}$, valeur de $S_{n,p}$ pour $p = 1$ quel que soit n, doit tendre vers zéro pour n infini (96).

98. Mais cette condition n'est pas suffisante; par exemple, l'inverse du terme général $a + bn$ d'une progression arithmétique dont la raison b n'est pas nulle est une quantité infiniment petite; cependant *la série*

$$(2) \qquad \sum \frac{1}{a + bn}$$

qui a cet inverse pour terme général est divergente et a une somme infinie (94).

I. En supposant d'abord $b = 1$ et a réel, les termes de cette série finissent par être positifs et sans cesse décroissants. On finit donc par avoir

$$S_{n,p} > \frac{p}{a+n+p},$$

parce que chacun des p termes du groupe $S_{n,p}$ est positif et au moins égal au dernier d'entre eux $\frac{1}{a+n+p}$. On a, par suite, en prenant $p = n$,

$$S_{n,n} > \frac{1}{\varepsilon + 2}$$

à partir du moment où la valeur numérique de la quantité infiniment petite $\frac{a}{n}$ tombe au-dessous de la constante positive ε choisie arbitrairement. Pour cette relation $p = n$ établie entre ces deux nombres, la variante $S_{n,p}$ ne tend donc pas vers zéro.

D'autre part, S_n croît sans limite puisque, à partir d'une certaine valeur de n, il suffit ainsi de doubler ce nombre pour faire subir à cette somme un accroissement supérieur à la quantité invariable $\frac{1}{\varepsilon+2}$.

II. En supposant toujours $b = 1$, mais en attribuant à a une valeur imaginaire quelconque $a' + ia''$, les premiers éléments des termes de notre série forment la série

$$(3) \qquad \sum \frac{a'+n}{(a'+n)^2 + a''^2}$$

dont les termes surpassent respectivement ceux de

$$\sum \frac{1}{a'+\varepsilon+n}$$

à partir du moment où $a'+n$ reste positif et où la quantité infiniment petite $\frac{a''^2}{a'+n}$ reste inférieure à la quantité positive ε choisie arbitrairement.

Cette dernière série ayant une somme infinie (I), il en est de

même pour la précédente (3). En d'autres termes, le premier élément de S_n pour la série que nous considérons (2) et cette somme elle-même par conséquent (82) sont des quantités infinies.

III. Comme en posant $\frac{a}{b} = a_1$, on a

$$\frac{1}{a+bn} = \frac{1}{b}\,\frac{1}{a_1+n},$$

la somme des n premiers termes de notre série (2) est égale au produit par $\frac{1}{b}$ de la même somme pour $\sum \frac{1}{a_1+n}$. Cette dernière étant infinie (II), la première ne peut manquer de l'être aussi.

99. *Si u_n est une variante positive infiniment petite qui décroît toujours quand n augmente, et si dans la série*

$$\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_n + \ldots,$$

la somme $\Theta_{n,p}$ des p termes qui suivent le $n^{\text{ième}}$ conserve, quels que soient n et p, un module non supérieur à quelque quantité positive invariable H, *cette autre série*

$$(4) \qquad u_1\theta_1 + u_2\theta_2 + \ldots + u_n\theta_n + \ldots$$

est certainement convergente, et son reste R_n *est limité par l'inégalité*

$$(5) \qquad \operatorname{mod} R_n \leqq H\, u_{n+1}.$$

(¹) En appelant $S_{n,p}$ la somme des p termes venant après le $n^{\text{ième}}$ dans la série (4), l'égalité évidente

$$S_{n,p} = \Theta_{n,1}(u_{n+1} - u_{n+2}) + \Theta_{n,2}(u_{n+2} - u_{n+3}) + \ldots \\ + \Theta_{n,p-1}(u_{n+p-1} - u_{n+p}) + \Theta_{n,p}\, u_{n+p}$$

donne immédiatement

$$(6) \qquad \left\{ \begin{aligned} \operatorname{mod} S_{n,p} \leqq H[(u_{n+1} - u_{n+2}) + \ldots \\ + (u_{n+p-1} - u_{n+p}) + u_{n+p}] \leqq H\, u_{n+1}, \end{aligned} \right.$$

(¹) Cette démonstration m'a été communiquée par M. Riquier.

parce que chaque terme de cette somme est le produit de deux facteurs dont le second est positif, dont le premier a un module non supérieur à H. Cette somme $S_{n,p}$ est donc, comme u_{n+1}, infiniment petite pour n infini, indépendamment de toute relation entre n et p, ce qui prouve la convergence de la série (4) (96).

Si maintenant on suppose p infini dans la relation (6), elle donne l'inégalité (5).

100. En appelant θ une quantité non $= 1$, mais de module $= 1$, et en prenant $\theta_n = \theta^n$, il vient aussitôt

$$\Theta_{n,p} = \theta^{n+1} + \theta^{n+2} + \ldots + \theta^{n+p} = \theta^{n+1}\frac{\theta^p - 1}{\theta - 1},$$

d'où, quels que soient n, p,

$$\operatorname{mod}\Theta_{n,p} \leqq \frac{2}{\operatorname{mod}(\theta - 1)}.$$

Il en résulte, par ce qui précède, que *la série*

$$u_1\theta + u_2\theta^2 + \ldots + u_n\theta^n + \ldots$$

est convergente avec un reste limité par l'inégalité

$$\operatorname{mod}R_n \leqq \frac{2u_{n+1}}{\operatorname{mod}(\theta - 1)}.$$

101. En prenant enfin $\theta = -1$, on trouve comme cas particulier que *la série*

$$-u_1 + u_2 - u_3 + \ldots + (-1)^n u_n + \ldots$$

est convergente et qu'on a numériquement $R_n \leqq u_{n+1}$. En outre, *sa somme* $-u_1 + R_1$ *est toujours négative* parce que, numériquement, R_1 ne peut surpasser u_2 qui est $< u_1$.

Il est évident, d'après cela, que la série

$$u_1 - u_2 + u_3 - \ldots$$

est aussi convergente, mais avec une somme toujours positive.

102. Les séries dont les termes finissent par être réels et d'un même signe donnent lieu à quelques observations générales.

I. *Quand une semblable série est divergente, sa somme est nécessairement infinie.* Effectivement, la valeur numérique de S_n finit par croître sans cesse avec n; S_n serait donc une variante convergente contrairement à l'hypothèse, si cette valeur numérique ne croissait pas indéfiniment (38).

On peut vérifier l'exactitude de cette observation dans le cas particulier considéré ci-dessus (98, I); mais elle ne s'applique pas à toutes les séries divergentes. Par exemple

$$a - a + a - a + \ldots$$

est une série divergente quand a n'est pas nulle, parce que son terme général n'est pas infiniment petit (97); cependant sa somme n'est pas infinie, parce que S_n ne prend jamais que les valeurs a ou o, suivant que n est impair ou pair.

II. *Soient*

$$(7) \qquad u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots,$$

$$(8) \qquad u'_1 + u'_2 + \ldots + u'_n + \ldots$$

deux séries de cette espèce et $|u_n|$, $|u'_n|$ *les valeurs numériques de leurs termes de même rang n. Si l'on finit par avoir*

$$|u_n| \leqq |u'_n|,$$

et si la seconde est convergente, la première l'est aussi, et son reste ne peut surpasser le reste correspondant de cette dernière.

Le premier point résulte de l'inégalité finale évidente

$$|S_{n,p}| \leqq |S'_{n,p}|$$

combinée avec la propriété de $S'_{n,p}$ de tendre vers zéro pour n infini à cause de la convergence de la seconde série. Le second point est ce que donne la même inégalité pour p infini.

III. On prouvera de même que *la série* (7) *est divergente si la série* (8) *l'est, et si l'on a finalement au contraire*

$$|u_n| \geqq |u'_n|.$$

IV. *La série* (7) *est convergente si la série* (8) *l'est, et si à partir de* $n = \nu$ *on a toujours*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{u'_{n+1}}{u'_n}.$$

En multipliant membre à membre les inégalités provenant de celle-ci par l'attribution des valeurs ν, $\nu+1$, ..., $N-1$ à n, on trouve quel que soit N

$$|u_N| \leq \left|\frac{u_\nu}{u'_\nu} u'_N\right|.$$

On en conclut, quels que soient n, p à partir de $n = \nu$,

$$|S_{n,p}| \leq \left|\frac{u_\nu}{u'_\nu} S'_{n,p}\right|,$$

d'où pour n infini

$$\lim |S_{n,p}| \leq \left|\frac{u_\nu}{u'_\nu} \lim S'_{n,p}\right| = 0,$$

à cause de la convergence supposée de la série (8).

De là, on conclut encore

$$(9) \qquad |R_n| \leq \left|\frac{u_n}{u'_n} R'_n\right|,$$

en appelant R_n, R'_n les restes correspondants des deux séries.

V. On prouve de la même manière que la série (7) est divergente si la série (8) l'est, et si l'on a finalement au contraire

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq \frac{u'_{n+1}}{u'_n}.$$

VI. Par exemple, nous verrons bientôt (113, *inf.*) que la progression géométrique, à raison positive ρ,

$$1 + \rho + \rho^2 + \ldots,$$

est convergente ou divergente selon que ρ est ou non inférieur à 1. En réduisant donc la série (8) à cette progression, les alinéas IV, V conduisent à ces deux règles particulières :

Une série telle que (7) *est convergente, quand le rapport*

d'un terme au précédent finit par rester inférieur à une quantité invariable, elle-même inférieure à 1, *en particulier quand il tend vers une quantité de cette espèce.*

Elle est divergente, quand ce rapport finit par rester supérieur à 1, *en particulier quand il a pour limite une quantité* > 1.

103. *Pour que la série* (1), *à termes quelconques réels ou imaginaires, soit convergente, il suffit que la série*

$$(10) \qquad \upsilon_1 + \upsilon_2 + \ldots + \upsilon_n + \ldots$$

formée par les modules de ses termes le soit elle-même.

Comme $S_{n,p}$ est la somme de quantités dont les modules υ_{n+1}, $\upsilon_{n+2}, \ldots, \upsilon_{n+p}$ ont pour somme $\Sigma_{n,p}$, expression analogue pour la série (10), on a toujours (62)

$$\bmod S_{n,p} \leqq \Sigma_{n,p},$$

d'où $\lim S_{n,p} = 0$ si cette série (10) est convergente, car alors on a nécessairement $\lim \Sigma_{n,p} = 0$.

La somme et le reste de la série (1) *ont alors des modules inférieurs, égaux au plus, à la somme et au reste semblable de la série* (10), ce dont on s'assure par le même raisonnement.

La convergence de la série (10) n'est pas nécessaire à celle de la série (1). Par exemple, la série

$$(11) \qquad \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n} + \ldots$$

est convergente (101), tandis que celle des modules de ses termes

$$(12) \qquad \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$$

est divergente (98). Mais les séries dont la convergence a pour cause celle des séries formées par les modules de leurs termes, c'est-à-dire qui restent encore convergentes quand les termes y sont remplacés par leurs modules, jouissent de propriétés spéciales de la plus haute importance qui les rapprochent tout à fait des polynômes véritables; on les dit souvent *absolument conver-*

gentes. C'est principalement pour les autres séries qu'il faut se garder de l'assimilation contre laquelle nous prévenions le lecteur au nº **94**. Nous en aurons la preuve dans un instant.

Groupement, déplacement et décomposition des termes d'une série.

104. *Dans une série convergente quelconque*

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots, \tag{1}$$

on peut toujours, à condition de ne déplacer aucun de ses termes, les grouper arbitrairement sans détruire sa convergence ni altérer sa somme.

Soient $U', U'', \ldots, U^{(N)}, \ldots$ des sommes de groupes de termes consécutifs formés d'une manière quelconque à la suite les uns des autres; nous voulons dire que la nouvelle série

$$U' + U'' + \ldots + U^{(N)} + \ldots \tag{2}$$

est convergente et a une somme égale à celle de la proposée. Si l'on nomme, en effet, n l'indice du terme de la série (1) qui est le dernier de ceux dont $U^{(N)}$ est la somme, il est évident que la somme des N premiers termes de (2) est toujours égale à celle des n premiers de (1), par suite qu'elle a même limite pour N infini, car alors $n \geqq N$ ne peut manquer de croître indéfiniment aussi.

105. *Si les modules des termes de* (1) *forment aussi une série convergente*

$$\upsilon_1 + \upsilon_2 + \ldots + \upsilon_n + \ldots, \tag{3}$$

toute série partielle

$$u' + u'' + \ldots \tag{4}$$

formée, mais sans répétition, avec des termes pris au hasard dans la série (1) *est aussi convergente.*

La série

$$v_1 + v_2 + \ldots + v_m + \ldots \tag{5}$$

ayant pour termes les sommes de semblables séries partielles, est aussi convergente si ces séries ont été formées successivement au hasard, mais sans répétition, c'est-à-dire si aucune d'elles ne contient un terme de (1) *figurant déjà dans quelqu'une des précédentes.*

Si, en outre, ces séries partielles ont été formées sans omission, c'est-à-dire si m peut être pris assez grand pour que les m premières contiennent tels termes de la proposée qu'on voudra, la série (5) *a même somme que cette dernière.*

Considérons la somme de termes consécutifs de rangs quelconques dans la série partielle (4), dont nous appellerons $n+1$, $n+p$ le plus petit et le plus grand des rangs qu'ils occupaient dans (1). Le module ω de cette somme, qui est au plus égal à la somme des modules des termes en question (62), peut encore moins surpasser $\Sigma_{n,p}$, somme des p termes suivant le $n^{\text{ième}}$ dans (3), qui contient tous ces modules et d'autres avec eux peut-être encore. D'ailleurs, et cela parce qu'il n'y a pas eu répétition dans la construction de la série partielle (4), n augmente indéfiniment avec les rangs qu'occupent dans cette série partielle les termes du groupe considéré. Donc $\Sigma_{n,p}$ tend vers zéro parce que (3) est supposée convergente; ω aussi à plus forte raison, ce qui entraîne la convergence de (4).

Considérons en second lieu la somme

$$T_{m,q} = v_{m+1} + v_{m+2} + \ldots + v_{m+q}$$

des q termes suivant le $m^{\text{ième}}$ dans la série (5), et soit $n+1$ le moins élevé des rangs occupés dans (1) par les termes de cette dernière série qui ont été sommés partiellement pour former les diverses parties de $T_{m,q}$. Les modules de ces derniers termes figurent tous, mais avec ceux d'autres, dans R_n, reste de la série (3) arrêtée à son terme de rang n; d'où, comme tout à l'heure,

$$\operatorname{mod} T_{m,q} < R_n.$$

En outre, et parce qu'il n'y a pas eu répétition dans la formation successive des termes de (5), n augmente indéfiniment avec m. On a donc $\lim R_n = 0$, ce qui entraîne $\lim T_{m,q} = 0$ indépendam-

ment de toute variation simultanée de q et, par suite, la convergence de la série (5).

Appelons enfin T_m la somme des m premiers termes de (5), u_{n+1} le premier des termes de (1) qui n'ont pas été employés à leur formation, et S_n la somme des n premiers termes de cette même série qui ainsi figurent tous dans T_m. Il est clair que la différence

$$T_m - S_n$$

ne se compose encore que de termes de (1) dont les modules figurent dans R_n, d'où

$$\operatorname{mod}(T_m - S_n) < R_n.$$

Mais, comme la série (5) a été construite sans omission, la croissance illimitée de m entraîne celle de n; R_n tend donc vers zéro, le premier membre de cette inégalité à plus forte raison, et l'on a bien

$$\lim T_m = \lim S_n.$$

106. Comme les suites partielles analogues à (4) peuvent fort bien être limitées et, par exemple, ne contenir chacune qu'un terme, *un déplacement arbitraire des termes d'une série ne détruit pas sa convergence et ne change pas sa somme, pourvu qu'elle reste convergente quand on y réduit chaque terme à son module.*

Ceux qui commencent l'étude des séries les assimilent trop facilement à des sommes de quantités en nombre limité, et ils ont habituellement quelque peine à concevoir la nécessité de cette condition. Il faut donc la leur faire toucher du doigt par un exemple numérique.

Formons la série

$$(6) \qquad 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \ldots,$$

en écrivant indéfiniment dans leur ordre de succession deux termes positifs et un terme négatif de la série

$$(7) \qquad 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots,$$

déjà considérée au n° **103**, série que nous savons convergente tandis que celle des modules de ses termes est divergente.

En appelant S_{4k} la somme des $4k$ premiers termes de (7), T_{3k} celle des $3k$ premiers de (6), et en posant, pour abréger,

$$\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\ldots+\frac{1}{k+k}=v_k,$$

on a évidemment

$$T_{3k}-S_{4k}=\frac{1}{2}v_k.$$

En faisant successivement $k=2, \ldots, k$ dans l'égalité évidente

$$v_k-v_{k-1}=\frac{1}{2k-1}+\frac{1}{2k}-\frac{1}{k}=\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k},$$

ajoutant membre à membre celles qu'on obtient ainsi, entre elles et avec

$$v_1=\frac{1}{2}=1-\frac{1}{2},$$

il reste

$$v_k=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k},$$

d'où $\lim v_k=S$, somme de la série (7) qui est une quantité positive (**101**), puis

$$\lim T_{3k}=\frac{3}{2}S.$$

La série (6) est donc convergente, mais sa somme surpasse de $\frac{1}{2}S$ celle de la série (7), bien que l'une et l'autre ne diffèrent que par l'ordre de succession des termes.

Les termes positifs de la série (7) forment une série dont la somme est infinie, parce que leurs dénominateurs sont en progression arithmétique (**98**); de même pour les termes négatifs. On peut donc, indéfiniment et alternativement, écrire les unes à la suite des autres, sans omission ni répétition, une somme de termes positifs et une autre de termes négatifs, surpassant toutes en valeur absolue une même quantité positive α prise à volonté. En opérant ainsi, on obtient une série composée qui est divergente parce que, si loin qu'on s'y transporte, on n'y rencontre jamais que des termes dont les valeurs numériques surpassent α.

Ajoutons enfin qu'à eux seuls, les termes positifs ou les termes négatifs de la même série formeraient une série partielle divergente.

107. *Inversement, soit*

(8) $$v_1 + v_2 + \ldots + v_m + \ldots$$

une série convergente dont les termes sont eux-mêmes des sommes de séries convergentes

(9) $$\begin{cases} u'_1 + u''_1 + \ldots + u_1^{(n)} + \ldots, \\ u'_2 + u''_2 + \ldots + u_2^{(n)} + \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u'_m + u''_m + \ldots + u_m^{(n)} + \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Si les séries

(10) $$\begin{cases} \varphi_1 = \upsilon'_1 + \upsilon''_1 + \ldots + \upsilon_1^{(n)} + \ldots, \\ \varphi_2 = \upsilon'_2 + \upsilon''_2 + \ldots + \upsilon_2^{(n)} + \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_m = \upsilon'_m + \upsilon''_m + \ldots + \upsilon_m^{(n)} + \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

formées par les modules des termes des précédentes sont aussi convergentes, et celle aussi

(11) $$\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_m + \ldots$$

qui a leurs diverses sommes pour termes, une série

(12) $$u_1 + u_2 + \ldots + u_N + \ldots$$

formée d'une manière quelconque mais sans répétition ni omission avec les termes élémentaires des séries partielles (9), *est convergente et a même somme que la proposée* (8).

Établissons d'abord la convergence de la série

(13) $$\upsilon_1 + \upsilon_2 + \ldots + \upsilon_N + \ldots,$$

formée par les modules des termes de (12), et pour cela considérons la somme

(14) $$\Omega_{m,n} = \Phi_m + \rho_1^{(n)} + \rho_2^{(n)} + \ldots + \rho_m^{(n)}$$

des restes tant de la série (11) que des m premières du groupe (10), arrêtées l'une à son terme de rang m, les autres à leurs termes de rang commun n.

Si dans le tableau (10) on trace un angle droit comprenant entre ses côtés tous les termes ayant des indices $\leqq m$ et des accents $\leqq n$, l'expression (14) résulte évidemment d'une sommation de tous les termes extérieurs à cet angle; par suite elle diminue toujours quand m, n augmentent séparément ou ensemble, car alors les côtés de cet angle se déplacent de manière à faire passer des termes de son extérieur à son intérieur.

D'autre part, cette même somme peut être rendue plus petite qu'une quantité positive δ de petitesse arbitraire; car il suffit pour cela, ce que nos hypothèses rendent possible, de prendre m puis n assez grands pour que les termes de $\Omega_{m,n}$ soient inférieurs, le premier à $\frac{\delta}{2}$ et chacun des m autres à $\frac{\delta}{2m}$. Cette somme constitue donc une variante aux indices m, n qui est infiniment petite.

Maintenant, la somme $\Upsilon_{N,P}$ des P termes suivant le $N^{\text{ième}}$ dans la série (13) est certainement inférieure à $\Omega_{m,n}$, et cela quel que soit P, si, comme il est permis de le supposer, N a été pris assez grand pour que les N premiers termes de (13) comprennent les n premiers de chacune des m premières séries (10); car alors les termes de $\Upsilon_{N,P}$ constituent au plus une partie de ceux dont la sommation donne $\Omega_{m,n}$. Comme $\Omega_{m,n}$ est une quantité infiniment petite, $\Upsilon_{N,P}$ l'est aussi pour N infini, ce qui entraîne bien la convergence de ce que devient la série (12) quand chaque terme y est remplacé par son module.

Cela posé, l'application du théorème du n° 105 à la série (8), résultant simplement du déplacement et du groupement des termes de cette dernière sans omission ni répétition, montre immédiatement qu'elle a même somme.

Quand les conditions posées ne sont pas remplies; les conséquences déduites de leur existence peuvent cesser de subsister.

Par exemple, la série

$$(1-1)+(1-1)+\ldots,$$

c'est-à-dire

$$0+0+\ldots,$$

est convergente; mais la série

$$2+2+\dots,$$

formée par les sommes des modules des diverses parties de ses termes, ne l'est pas. Aussi la série

$$1-1+1-1+\dots,$$

qui a pour termes ces parties elles-mêmes, n'est pas même convergente (97).

Addition, soustraction et multiplication des sommes de plusieurs séries.

108. *Si des séries convergentes ont*

$$u'_n,\quad u''_n,\quad \dots,\quad u^{(k)}_n$$

pour termes de rang n respectivement et

$$S',\quad S'',\quad \dots,\quad S^{(k)}$$

pour sommes; si en outre

(1) $$a',\quad a'',\quad \dots,\quad a^{(k)}$$

sont des coefficients donnés en même nombre, la série dont

$$u_n = a'u'_n + a''u''_n + \dots + a^{(k)}u^{(k)}_n$$

est le terme de rang n est aussi convergente, et sa somme S *se calcule au moyen de la même relation linéaire et homogène*

$$S = a'S' + a''S'' + \dots + a^{(k)}S^{(k)}.$$

Entre les sommes des n premiers termes de toutes les séries considérées, on a évidemment la même relation

$$S_n = a'S'_n + a''S''_n + \dots + a^{(k)}S^{(k)}_n,$$

d'où l'on déduit immédiatement la précédente en passant aux limites (81).

109. En réduisant soit le nombre k à 1, soit les coefficients (1) à ± 1, on trouve ces corollaires très souvent appliqués.

On multiplie ou l'on divise par une quantité invariable donnée la somme d'une série convergente, en exécutant la même opération sur tous ses termes.

On combine par voie d'addition ou de soustraction les sommes de plusieurs séries convergentes, en combinant de la même manière leurs termes de rangs égaux dans toutes.

110. *Quand plusieurs séries*

$$\Sigma u_m, \quad \Sigma v_n, \quad \Sigma w_p, \quad \ldots \tag{2}$$

sont convergentes, elles et les séries

$$\Sigma \upsilon_m, \quad \Sigma \varphi_n, \quad \Sigma \psi_p, \quad \ldots \tag{3}$$

formées par les modules de leurs termes, les produits partiels de termes pris respectivement dans chacune d'elles de toutes les manières possibles forment une série qui est convergente, même quand on réduit ses termes à leurs modules, et dont la somme est égale au produit de celles des proposées.

Plus brièvement, la série

$$\Sigma(u_m v_n w_p \ldots)$$

et celle des modules de ses termes sont convergentes, et l'on a, comme s'il s'agissait de simples polynômes,

$$\Sigma(u_m v_n w_p \ldots) = (\Sigma u_m)(\Sigma v_n)(\Sigma w_p) \ldots.$$

I. Traitons d'abord le cas où il s'agirait des deux premières séries seulement; écrivons les termes de la série

$$\Sigma \upsilon_m \varphi_n = \upsilon_0 \varphi_0 + \upsilon_1 \varphi_0 + \upsilon_0 \varphi_1 + \upsilon_2 \varphi_0 + \upsilon_1 \varphi_1 + \upsilon_0 \varphi_2 + \ldots, \tag{4}$$

dans un ordre tel que la somme des indices de leurs facteurs n'aille jamais en diminuant, et considérons dans cette série un groupe quelconque de termes consécutifs que nous désignerons par (p, q), en appelant q la plus grande somme que dans chacun d'eux les indices de ses deux facteurs puissent donner, et p le plus grand

entier dont le double soit inférieur à la plus petite somme des mêmes indices.

Tous les termes de (p, q) figurent évidemment dans le développement du produit

$$(\upsilon_0 + \upsilon_1 + \ldots + \upsilon_p + \upsilon_{p+1} + \ldots + \upsilon_q)(\varphi_0 + \varphi_1 + \ldots + \varphi_p + \varphi_{p+1} + \ldots + \varphi_q),$$

mais aucun d'eux dans celui du produit

$$(\upsilon_0 + \upsilon_1 + \ldots + \upsilon_p)(\varphi_0 + \varphi_1 + \ldots + \varphi_p).$$

Par suite, ils sont tous contenus dans la somme de quantités positives obtenue en retranchant le second développement du premier et en effaçant les termes qui se détruisent; d'où

$$(p, q) \leqq \left\{ \begin{array}{l} (\upsilon_0 \quad + \ldots + \upsilon_p)(\varphi_{p+1} + \ldots + \varphi_q) \\ + (\upsilon_{p+1} + \ldots + \upsilon_q)(\varphi_0 \quad + \ldots + \varphi_p) \\ + (\upsilon_{p+1} + \ldots + \upsilon_q)(\varphi_{p+1} + \ldots + \varphi_q). \end{array} \right.$$

Quand le rang occupé dans la série (4) par le premier terme du groupe (p, q) augmente indéfiniment, les entiers $p < q$ croissent aussi sans limite. Il en résulte, à cause de la convergence des deux premières séries (3), que dans le second membre de l'inégalité précédente, les deux facteurs de la première partie ont pour limites le premier $\Sigma\upsilon_m$ le second o, ceux de la seconde o, $\Sigma\varphi_n$, ceux de la dernière o, o. On a donc $\lim(p, q) = 0$, et la série (4) qui a précisément pour termes les modules de ceux de

$$(5) \qquad u_0 v_0 + u_1 v_0 + u_0 v_1 + u_2 v_0 + u_1 v_1 + u_0 v_2 + \ldots$$

est convergente.

Cette dernière l'est donc aussi (103), et on peut lui faire subir les opérations spécifiées dans l'énoncé du théorème du n° 105. On trouve ainsi que sa somme est égale à celle de la série qui a pour termes les sommes des séries partielles

$$\begin{array}{l} u_0 v_0 + u_0 v_1 + u_0 v_2 + \ldots, \\ u_1 v_0 + u_1 v_1 + u_1 v_2 + \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_m v_0 + u_m v_1 + u_m v_2 + \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array}$$

c'est-à-dire (109) à

$$u_0 \Sigma v_n + u_1 \Sigma v_n + \ldots + u_m \Sigma v_n + \ldots = (u_0 + u_1 + \ldots) \Sigma v_n = (\Sigma u_m)(\Sigma v_n).$$

On a donc bien

$$\Sigma(u_m v_n) = (\Sigma u_m)(\Sigma v_n).$$

II. Les modules des termes de (5) formant ainsi une série convergente, on peut appliquer ce qui précède à cette nouvelle série et à la troisième des proposées (2). On trouve ainsi

$$\begin{aligned} \Sigma(u_m v_n w_p) &= \Sigma[(u_m v_n) w_p] = [\Sigma(u_m v_n)](\Sigma w_p) \\ &= (\Sigma u_m)(\Sigma v_n)(\Sigma w_p), \end{aligned}$$

et de même successivement pour toutes ces séries (2) quel qu'en soit le nombre, parce que l'on ne rencontre jamais, comme produits transitoires, que des séries dont les termes ont des modules en séries convergentes.

Ceci achève la démonstration de cette importante proposition, qui évidemment s'applique à la formation non seulement du produit des séries (2), mais encore *de leurs puissances entières et d'un produit quelconque de semblables puissances.*

111. La combinaison des deux théorèmes précédents montre plus généralement que, *si des séries données restent convergentes quand leurs termes se réduisent à leurs modules, toute expression entière par rapport à leurs sommes se développe exactement comme si ces séries se réduisaient à de simples polynômes, en une autre dont les modules des termes sont aussi en série convergente.*



CHAPITRE V.

SÉRIES ENTIÈRES.

Convergence.

112. Une série dépendant de plusieurs variables indépendantes $x, y, z, \ldots$ est dite *entière,* quand ses divers termes sont des monômes dissemblables en $x, y, z, \ldots$. Par exemple,

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_m x^m + \ldots$$

est une série entière en x, et

$$a_{m,n} x^m y^n, \qquad a_{m,n,p} x^m y^n z^p$$

sont les types des termes généraux de semblables séries à 2 et 3 variables, les *coefficients* $a_0, \ldots, a_m, \ldots; a_{m,n}, a_{m,n,p}$ étant, bien entendu, des constantes. Nous ne parlons pas de l'ordre de succession des termes parce qu'il est indifférent dans les circonstances générales où l'on a à considérer des séries entières (**116**, III, *inf.*).

Les séries de cette espèce jouent un rôle immense, aussi bien dans les Mathématiques pures que dans les Sciences physiques. Nous les considérons même comme formant exclusivement la matière de toutes les théories qui se rattachent naturellement à l'Analyse infinitésimale.

Elles comprennent, comme cas particuliers, les polynômes entiers, dans lesquels elles dégénèrent évidemment quand tous leurs coefficients se réduisent à zéro au delà d'un certain rang. D'une manière générale, on peut dire qu'elles jouissent de toutes les propriétés des fonctions entières qui n'impliquent pas la notion de degré; et les démonstrations s'en font exactement de même, à

part le surcroît de complication provenant, pour les séries, de la nécessité de se préoccuper de leur convergence.

Dans une série entière, comme dans un polynôme (**29**), il y a quelquefois à distinguer les termes *effectifs,* c'est-à-dire pourvus de coefficients non $=0$, de ceux dont les coefficients s'évanouissent.

113. La plus simple des séries entières est celle dont tous les coefficients se réduisent à 1

$$(1)\quad \Sigma(x^m y^n z^p\ldots) = 1 + x + y + z + \ldots + x^2 + y^2 + z^2 + yz + \ldots + x^3 + \ldots$$

et qui est en quelque sorte une *progression géométrique à plusieurs raisons*. Sa théorie, qui doit précéder celle des autres, se résume dans l'énoncé suivant.

La série (1) *est convergente, ainsi que celle des modules de ses termes, quand les modules* $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ *des valeurs des variables sont tous inférieurs à* 1; *sa somme est alors*

$$\frac{1}{(1-x)(1-y)(1-z)\ldots}.$$

Elle est divergente dans tous les autres cas.

Le dernier point est évident, car si ξ, par exemple, est $\geqq 1$, le terme x^m a aussi un module ξ^m toujours $\geqq 1$, et le terme général ne tend pas vers zéro (**97**).

Quand, au contraire, on a

$$\xi < 1, \quad \eta < 1, \quad \zeta < 1, \quad \ldots,$$

la variante $\xi^m = \operatorname{mod} x^m$ tend vers zéro pour m infini (**52**, I). Le premier membre de l'identité

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^m = \frac{1 - x^{m+1}}{1-x} = \frac{1}{1-x} - \frac{x^{m+1}}{1-x}$$

a donc pour limite la première partie de son second membre, puisque la dernière partie de celui-ci a un module infiniment

petit, d'où

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{l} \Sigma x^m = \dfrac{1}{1-x}, \\ \text{puis de même} \\ \Sigma y^n = \dfrac{1}{1-y}, \qquad \Sigma z^p = \dfrac{1}{1-z}, \qquad \ldots, \end{array}\right.$$

et chacune de ces séries reste convergente quand on réduit ses termes à leurs modules; car $\Sigma\xi^m$, par exemple, n'est pas autre chose que ce que devient Σx^m par l'attribution à x de la valeur ξ constituant une quantité dont le module est < 1.

Le théorème du n° **110** est donc applicable aux séries (2), et il conduit immédiatement à celui dont nous nous occupons, en particulier à la relation

$$\Sigma(x^m y^n z^p \ldots) = \frac{1}{(1-x)(1-y)(1-z)\ldots}.$$

114. *Si, pour certaines valeurs des variables*

$$(3)\qquad x = \mathrm{X}, \quad y = \mathrm{Y}, \quad z = \mathrm{Z}, \quad \ldots,$$

le terme général de la série entière quelconque

$$(4)\qquad \Sigma(a_{m,n,p,\ldots} x^m y^n z^p \ldots)$$

est fini, à plus forte raison si cette série est convergente (**97**), *elle l'est aussi, elle et celle des modules de ses termes, pour*

$$(5)\qquad \operatorname{mod} x < \operatorname{mod} \mathrm{X}, \quad \operatorname{mod} y < \operatorname{mod} \mathrm{Y}, \quad \operatorname{mod} z < \operatorname{mod} \mathrm{Z}, \quad \ldots.$$

Si au contraire elle est divergente pour les valeurs (3), *elle l'est aussi pour*

$$(6)\qquad \operatorname{mod} x > \operatorname{mod} \mathrm{X}, \quad \operatorname{mod} y > \operatorname{mod} \mathrm{Y}, \quad \operatorname{mod} z > \operatorname{mod} \mathrm{Z}, \quad \ldots.$$

I. *Si la série*

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

est convergente et celle aussi des modules de ses termes

$$(7)\qquad v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots,$$

la série

(8) $$u_1 v_1 + u_2 v_2 + \ldots + u_n v_n + \ldots,$$

obtenue en multipliant son terme général par une variante finie v_m, jouit des mêmes propriétés.

Par hypothèse, φ_n module de v_n satisfait quel que soit n à l'inégalité $\varphi_n < \Phi$, où Φ désigne quelque quantité positive invariable. On a donc pour la somme des p termes suivant le $n^{\text{ième}}$ dans la série des modules des termes de (8)

$$\upsilon_{n+1}\varphi_{n+1} + \ldots + \upsilon_{n+p}\varphi_{n+p} < (\upsilon_{n+1} + \upsilon_{n+2} + \ldots + \upsilon_{n+p})\Phi.$$

Cette somme tend donc vers zéro, parce que celle entre parenthèses dans le second membre est infiniment petite à cause de la convergence de (7). Les modules des termes de (8) forment donc une série convergente, ce qu'il suffisait de constater.

II. D'après les hypothèses de la première partie de notre énoncé, la variante

(9) $$a_{m,n,p,\ldots} X^m Y^n Z^p \ldots$$

est finie, et la série

(10) $$\sum\left[\left(\frac{x}{X}\right)^m \left(\frac{y}{Y}\right)^n \left(\frac{z}{Z}\right)^p \cdots\right],$$

entière en

$$\frac{x}{X},\quad \frac{y}{Y},\quad \frac{z}{Z},\quad \ldots,$$

est convergente avec celle des modules de ses termes (113), parce que les modules de ces rapports sont tous < 1 à cause des inégalités (5). Donc (I) la série proposée (4), celle aussi des modules de ses termes, sont toutes deux convergentes, parce que son terme général est précisément le produit de celui de la série (10) par la variante (9).

III. La dernière partie est maintenant évidente; car, si la série (4) était convergente quand les inégalités (6) ont lieu, elle

le serait en vertu de la première partie, cela contrairement à l'hypothèse, pour les valeurs X, Y, Z, ... des variables.

115. La notation graphique des quantités imaginaires (**83** et suiv.) permet d'énoncer ce théorème dans des termes faisant mieux image qu'il est bon de retenir.

Dans les plans servant à la représentation graphique des valeurs de x, y, z, ..., traçons des cercles ayant les origines O_x, O_y, O_z, ... pour centres.

Si, quand $x, y, z, \ldots$ tombent quelque part sur les circonférences de ces cercles, la série (4) est convergente, ou même seulement si son terme général est fini, elle est convergente, celle aussi des modules de ses termes, quand $x, y, z, \ldots$ tombent toutes à l'intérieur de ces cercles. Car alors les modules des variables sont tous inférieurs respectivement à ceux de valeurs pour lesquelles le module du terme général est fini.

Si, au contraire, notre série est divergente quelque part sur les circonférences, elle l'est certainement à l'extérieur des cercles.

Ces formes circulaires et centrées aux origines, des lignes limitant ainsi les régions des plans où une série entière tantôt diverge, tantôt converge, tient à ce que *le module de chaque terme dépend exclusivement de ceux des valeurs des variables, en variant toujours dans le même sens que chacun d'eux variant isolément.*

116. Nous appellerons *rayons de convergence* de la série entière (4) tout groupe de quantités positives

$$(11) \qquad R_x, \quad R_y, \quad R_z, \quad \ldots$$

telles qu'il y ait convergence quand les modules des variables leur sont respectivement tous inférieurs, et aussi *cercles de convergence,* tout système de cercles ayant les origines pour centres et de pareilles quantités pour rayons. D'après cela, *cette série converge toujours à l'intérieur de cercles de convergence,* nous voulons dire quand les points $x, y, z, \ldots$ servant à la notation graphique des variables tombent tous dans ces cercles.

Par exemple, pour la série (1), des quantités positives quelconques toutes $\gtreqless 1$ constituent un système de rayons de convergence.

La connaissance d'un système de cercles de convergence n'apprend absolument rien sur les propriétés de la série (4) pour des valeurs des variables non toutes intérieures à ces cercles, en particulier pour celles tombant soit à leur extérieur, soit même sur leurs circonférences. Mais il en est tout autrement si ces valeurs sont toutes intérieures, *ce qui est toujours sous-entendu dès qu'il s'agit d'une série entière*. Voici les premières remarques à faire quand cette condition est remplie.

I. *La série* (4) *étant convergente définit par sa somme une certaine fonction de $x, y, z, \ldots$* (58) *pour toutes les valeurs de ces variables dont il s'agit*. C'est évident.

II. *Les modules de ses termes sont toujours en série convergente*. Comme on a effectivement

$$\operatorname{mod} x < R_x, \qquad \operatorname{mod} y < R_y, \qquad \operatorname{mod} z < R_z, \qquad \ldots,$$

on peut toujours satisfaire aux inégalités

$$\operatorname{mod} x < R'_x < R_x, \qquad \operatorname{mod} y < R'_y < R_y, \qquad \ldots$$

par l'attribution de certaines valeurs positives à R'_x, R'_y, R'_z, ... Cela posé, le point en question résulte immédiatement du théorème du n° 114, puisque par hypothèse la série est convergente pour

$$\operatorname{mod} x = R'_x, \qquad \operatorname{mod} y = R'_y, \qquad \ldots.$$

III. *L'ordre dans lequel on peut écrire, grouper aussi, les termes de la série est indifférent* (II), (105), (106).

IV. *Des termes, pris à volonté dans la série* (4), *forment une série entière partielle qui a mêmes cercles de convergence* (II), (105).

V. *Si dans la série* (4) *tous les termes effectifs* (112) *sont divisibles par le même monôme entier $x^\mu y^\nu z^\varpi \ldots$, les quotients de ces divisions forment une nouvelle série entière qui a mêmes*

cercles de convergence que la proposée et dont la somme est le quotient de celle de cette dernière par $x^{\mu}y^{\nu}z^{\varpi}\dots$ (109).

VI. *On peut donc ordonner la série* (4) *exactement comme un polynôme entier, par rapport à tel groupe partiel de ses variables qu'on voudra; les coefficients des puissances et produits de puissances des variables dont il s'agit sont alors des séries entières par rapport aux autres variables, ayant toutes pour cercles de convergence ceux de la proposée qui limitent les valeurs de ces dernières.*

VII. *Pour toutes valeurs des variables, intérieures à des cercles de convergence communs à plusieurs séries entières, on peut, comme si elles étaient de simples polynômes entiers, développer en une nouvelle série entière admettant les mêmes cercles de convergence, toute expression entière formée avec leurs sommes.* Car les modules des termes de chacune étant alors en série convergente (II), l'observation générale du n° 111 est applicable.

117. *Pour toutes valeurs de* $x, y, z, \dots$ *non extérieures à des circonférences décrites des origines* $O_x, O_y, O_z, \dots$ *comme centres avec des rayons*

$$R'_x,\quad R'_y,\quad R'_z,\quad \dots$$

respectivement inférieurs aux rayons de convergence (11), *on peut assigner une limite supérieure* M_k *indépendante de* $x, y, z, \dots$ *et tendant vers zéro pour k infini, à la somme de la série formée par les modules des termes de* $\varphi_k(x, y, \dots)$, *reste de la série* (4) *arrêtée à son* $k^{\text{ième}}$ *terme, et, à plus forte raison, à* $\operatorname{mod}\varphi_k(x, y, \dots)$.

En posant pour abréger

$$\operatorname{mod} a_{m,n,\dots} = \alpha_{m,n,\dots},\qquad \operatorname{mod} x = \xi,\qquad \operatorname{mod} y = \eta,\qquad \dots,$$

et appelant R''_x, R''_y, ... de nouvelles quantités positives choisies arbitrairement sous les conditions

$$R'_x < R''_x < R_x,\qquad R'_y < R''_y < R_y,\qquad \dots,$$

la variante $\alpha_{m,n,\ldots} R''^m_x R''^n_y \ldots$ est infiniment petite pour m, n, ... tous infinis et à plus forte raison finie, parce que, à l'intérieur des cercles de convergence de la série (4), les modules de ses termes sont toujours en série convergente (116, II). Il existe ainsi quelque quantité positive A donnant, quels que soient m, n, ...,

$$\alpha_{m,n,\ldots} R''^m_x R''^n_y \ldots < A,$$

donnant par suite, pour

$$\xi \leqq R'_x, \qquad \eta \leqq R'_y, \qquad \ldots,$$

l'inégalité

$$\begin{aligned} \operatorname{mod}(a_{m,n,\ldots} x^m y^n \ldots) &= \alpha_{m,n,\ldots} \xi^m \eta^n \ldots \\ &= (\alpha_{m,n,\ldots} R''^m_x R''^n_y \ldots)\left(\frac{\xi}{R''_x}\right)^m \left(\frac{\eta}{R''_y}\right)^n \ldots < A\left(\frac{\xi}{R''_x}\right)^m \left(\frac{\eta}{R''_y}\right)^n < \ldots \end{aligned}$$

et, à plus forte raison,

$$\operatorname{mod}(a_{m,n,\ldots} x^m y^n \ldots) < A\left(\frac{R'_x}{R''_x}\right)^m \left(\frac{R'_y}{R''_y}\right)^n < \ldots .$$

Comme les fractions entre parenthèses sont toutes < 1, la série ayant pour terme général le second membre de cette inégalité est convergente (113) et a pour somme

$$M_0 = A : \left[\left(1 - \frac{R'_x}{R''_x}\right)\left(1 - \frac{R'_y}{R''_y}\right) \ldots\right].$$

On obtiendra donc évidemment la limite supérieure cherchée, en prenant le reste M_k de cette série auxiliaire arrêtée à son $k^{\text{ième}}$ terme.

L'inégalité

$$\operatorname{mod} \varphi_k(x, y, \ldots) < M_k$$

a pour cas particulier

$$\operatorname{mod} f(x, y, \ldots) < M_0,$$

$f(x, y, \ldots)$ désignant la somme même de la série (4).

Dans le cas d'une seule variable x, le reste M_k se somme immédiatement, et l'on a simplement

$$\operatorname{mod} \varphi_k(x) < A\left(\frac{R'_x}{R''_x}\right)^k : \left(1 - \frac{R'_x}{R''_x}\right),$$

formule très utile dans l'évaluation numérique approchée des sommes des séries entières.

118. Sur les circonférences mêmes des cercles de convergence, les propriétés d'une série entière sont entièrement subordonnées au hasard des circonstances.

La série

$$\frac{x}{1^2}+\frac{x^2}{2^2}+\ldots+\frac{x^m}{m^2}+\ldots$$

est convergente pour $\bmod x < 1$, parce que, pour $\bmod x = 1$, $\frac{1}{m^2}$ module de son terme général est infiniment petit, à plus forte raison fini (**114**); elle est divergente pour $\bmod x > 1$, parce que $\left(\frac{m}{m+1}\right)^2 \bmod x$, rapport du module d'un terme à celui du précédent, ayant $\bmod x$ pour limite, finit alors par rester >1, et qu'ainsi le module du terme général finit par croître sans cesse au lieu de tendre vers zéro. Elle a donc 1 pour rayon de convergence *maximum*. Sur la circonférence du cercle doué de ce rayon elle est toujours convergente, même aussi celle des modules de ses termes

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\ldots,$$

ce qui résulte de la règle de Gauss que nous démontrerons dans notre deuxième Partie.

On trouve de même que le plus grand cercle de convergence de la série

$$\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}+\ldots+\frac{x^m}{m}+\ldots$$

a 1 pour rayon. Sur la circonférence de ce cercle, le module du terme général est toujours infiniment petit. La série elle-même y diverge pour $x=1$ (**98**), mais elle y converge toujours pour x non $=1$ (**100**).

La série

$$1+x+x^2+\ldots$$

diverge toujours sur la circonférence du cercle de rayon 1 qui est encore son plus grand cercle de convergence (**113**). Le module

de son terme général y reste $=1$, partant fini, mais non infiniment petit.

En construisant la série (1) avec deux variables ayant la même valeur x, on obtient celle-ci

$$1+2x+3x^2+\ldots+(m+1)x^m+\ldots$$

qui, par suite, est convergente pour $\operatorname{mod} x < 1$, divergente pour $\operatorname{mod} x \geqq 1$. Sur la circonférence du cercle de rayon 1 qui est un cercle de convergence, le module $m+1$ de son terme général est toujours infini. Etc.

119. Il n'y a pas moins de variété dans la grandeur même des rayons de convergence. D'abord, quand il en existe un système où ils sont tous >0, on en trouve une infinité d'autres en diminuant arbitrairement tous ces rayons. Il est évident en outre qu'*une série entière admet pour rayons de convergence des quantités positives données, si elle admet à ce titre toutes celles qui leur sont inférieures.*

Quelquefois, c'est le cas de la série (1), les rayons *maximums* sont déterminés individuellement. Plus souvent ils ne le sont pas et, par exemple, on peut en augmenter quelques-uns à condition de diminuer les autres (**120**, **276**, *inf.*).

Certaines séries entières, ce sont même les plus remarquables, admettent des rayons de convergence *infinis*, c'est-à-dire qu'elles convergent, elles et celles des modules de leurs termes, pour un système quelconque de valeurs des variables. Telle est, par exemple, le développement de la fonction exponentielle dont nous aurons à parler longuement dans la deuxième Partie de cet Ouvrage.

D'autres enfin sont toujours divergentes, les valeurs

$$x=y=z=\ldots=0$$

naturellement exceptées : telle est, par exemple, la série

$$1+1^1x+2^2x^2+\ldots+m^mx^m+\ldots$$

Le rapport des modules des termes de rangs $m+1$, m, y est égal à $\left(\frac{m+1}{m}\right)^m(m+1)\operatorname{mod} x$, quantité qui finit par surpasser 1, quelque petite valeur (sauf 0) qui ait été donnée à $\operatorname{mod} x$; le

terme général n'est donc jamais infiniment petit, puisque son module finit toujours par croître.

Substitution à chaque variable indépendante, d'une somme de quelques autres.

120. *Si dans la série entière*

(1) $$f(x, y, \ldots) = \Sigma(a_{m,n,\ldots} x^m y^n \ldots)$$

admettant

(2) $$R_x, \quad R_y, \quad \ldots$$

pour rayons de convergence, on substitue à x, y, ... *les sommes*

(3) $$x' + x'' + \ldots, \quad y' + y'' + \ldots, \quad \ldots,$$

où x', x'', ..., y', y'', ..., ... *désignent de nouvelles variables en nombres déterminés quelconques, et si les quantités positives quelconques, mais en nombres respectivement égaux,*

(4) $$R'_x, \quad R''_x, \quad \ldots; \quad R'_y, \quad R''_y, \quad \ldots; \quad \ldots$$

satisfont aux conditions

(5) $$R'_x + R''_x + \ldots \leqq R_x, \quad R'_y + R''_y + \ldots \leqq R_y, \quad \ldots.$$

l'expression

(6) $$f[(x' + x'' + \ldots), (y' + y'' + \ldots), \ldots]$$

peut être transformée en une série entière par rapport à toutes ces nouvelles variables sans distinction, qui admet les quantités (4) *pour rayons de convergence.*

I. *La somme des modules des termes du développement d'une expression entière est précisément égale à ce que devient la même expression, quand on y remplace par des signes* + *les signes* — *pouvant s'y trouver, et quand on y substitue leurs modules aux diverses quantités qui s'y trouvent engagées.*

Par exemple, les quantités a, b, c, d, e ayant α, β, γ, δ, ε pour modules, la somme des modules des termes du développement de

$$(a \pm b \pm c)^g (d \pm e)^h$$

est égale à

$$(\alpha + \beta + \gamma)^g (\delta + \varepsilon)^h.$$

Les premières règles du calcul des quantités imaginaires (Chap. III, *passim*) donnent à ce fait une évidence suffisante.

La même observation s'applique évidemment à la somme d'une série formée par les modules des termes du développement d'une expression entière par rapport à des sommes de séries qui sont toutes convergentes, elles et celles des modules de leurs termes (**111**).

II. Quand les modules

$$\xi', \ \xi'', \ \ldots, \ \eta', \ \eta'', \ \ldots, \ \ldots$$

des diverses parties des sommes (3) sont respectivement inférieurs aux quantités (4), les conditions (5) montrent que leurs sommes

$$(7) \qquad (\xi' + \xi'' + \ldots), \quad (\eta' + \eta'' + \ldots), \quad \ldots$$

et les modules des sommes (3) à plus forte raison, sont inférieurs aux rayons de convergence (2). Donc on peut donner à $x, y, \ldots$ des valeurs égales à ces dernières sommes (**116**, I); en d'autres termes, si l'on nomme

$$(7\ bis) \qquad u_{m,n,\ldots}, \quad v_{m,n,\ldots}, \quad \ldots, \quad w_{m,n,\ldots},$$

les monômes entiers dissemblables en

$$(8) \qquad x', \ x'', \ \ldots, \ y', \ y'', \ \ldots,$$

résultant du développement de l'expression

$$(9) \qquad a_{m,n,\ldots}(x' + x'' + \ldots)^m (y' + y'' + \ldots)^n \ldots,$$

la série ayant pour terme général le polynôme

$$(10) \qquad (u_{m,n,\ldots} + v_{m,n,\ldots} + \ldots + w_{m,n\ldots})$$

est convergente, et c'est précisément sa somme qu'il nous est ainsi permis de désigner par la notation (6).

Mais il y a plus : comme, en posant

$$\operatorname{mod} a_{m,n,\ldots} = \alpha_{m,n,\ldots},$$

la somme des modules des termes de l'expression (10) est égale à

$$\alpha_{m,n,\ldots}(\xi' + \xi'' + \ldots)^m(\eta' + \eta'' + \ldots)^n \ldots \quad (I),$$

c'est-à-dire à la valeur qu'acquiert le module du terme général de la série proposée (1) pour des valeurs des variables dont les modules (7) sont inférieurs à ses rayons de convergence (2), cette somme de modules et toutes les autres analogues forment une série convergente. On peut donc appliquer le théorème du n° 107 à la série qui a pour terme général le polynôme (10), et la remplacer par une autre ayant pour termes, non plus les valeurs mêmes de ces polynômes, mais les monômes analogues à (7 *bis*) écrits isolément dans un ordre quelconque, qui constituent leurs termes élémentaires. L'expression (6) est donc égale à la somme de cette dernière série qui, après réduction des termes semblables, est bien entière par rapport aux diverses variables (8) avec les rayons de convergence (4).

121. Il nous reste à exprimer les coefficients du développement de l'expression (6) au moyen de ceux de la série donnée (1). A cet effet, nous rappellerons d'abord la formule du binôme, en en établissant une autre plus générale dont la démonstration n'est pas plus longue.

En appelant m quelque entier non négatif, puis x, h deux quantités quelconques, et posant pour abréger

$$\{x, m\} = \frac{x(x-h)(x-2h)\ldots[x-(m-1)h]}{1.2\ldots m}$$

avec la convention de réduire le second membre à 1 *quand* $m = 0$, *on a la relation*

$$(11) \quad \{(x_1 + x_2 + \ldots + x_k), m\} = \Sigma\{x_1, m_1\}\{x_2, m_2\}\ldots\{x_k, m_k\},$$

la sommation s'étendant à tous les systèmes distincts de so-

lutions en entiers positifs ou nuls de l'équation indéterminée aux k inconnues $m_1, m_2, \ldots, m_k$

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_k = m. \tag{12}$$

Cette formule étant évidente pour $m = 1$, il suffit de constater que, si elle est vraie pour la valeur m de ce nombre, elle l'est aussi pour sa valeur $M = m + 1$.

En multipliant son premier membre par

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_k) - mh,$$

et le terme général du second par la somme

$$(x_1 - m_1 h) + (x_2 - m_2 h) + \ldots + (x_k - m_k h),$$

qui est toujours égale à cette quantité à cause de l'équation (12), il vient, après réduction des termes similaires dans le second membre,

$$\begin{cases} M\{(x_1 + x_2 + \ldots + x_k), M\} \\ \quad = \Sigma A_{M_1, M_2, \ldots, M_k}\{x_1, M_1\}\{x_2, M_2\}\ldots\{x_k, M_k\}, \end{cases} \tag{13}$$

où $M_1, M_2, \ldots, M_k$ sont tous les systèmes distincts de solutions entières non négatives de l'équation

$$M_1 + M_2 + \ldots + M_k = m + 1 = M,$$

et où $A_{M_1,\ldots,M_k}$ est un coefficient à déterminer. Or on ne peut trouver de termes en

$$\{x_1, M_1\}\{x_2, M_2\}\ldots\{x_k, M_k\}, \tag{14}$$

qu'en multipliant respectivement par

$$x_1 - (M_1 - 1)h, \quad x_2 - (M_2 - 1)h, \quad \ldots, \quad x_k - (M_k - 1)h$$

ceux des termes du second membre de la relation (11), où les entiers $m_1, m_2, \ldots, m_k$ ont les divers systèmes de valeurs

$$\begin{array}{cccc} M_1 - 1, & M_2, & \ldots, & M_k, \\ M_1, & M_2 - 1, & \ldots, & M_k, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots, \\ M_1, & M_2, & \ldots, & M_k - 1, \end{array}$$

ce qui donne dans le second membre de la relation (13) les produits de l'expression (14) par

$$M_1, \quad M_2, \quad \ldots, \quad M_k.$$

La réduction de ces produits conduit à

$$A_{M_1, M_2, \ldots, M_k} = M_1 + M_2 + \ldots + M_k = M,$$

et la division par M des deux membres de la relation (13) la ramène ainsi à la forme (11) dont il s'agissait de prouver la généralité.

122. En prenant $h = 0$ dans la formule (11), elle donne immédiatement celle du binôme

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_k)^m = \sum \frac{1.2\ldots m}{1.2\ldots m_1 . 1\ldots m_2 \ldots 1.2\ldots m_k} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \ldots x_k^{m_k},$$

la sommation s'étendant toujours aux systèmes de valeurs de m_1, m_2, ..., m_k définis par l'équation indéterminée (12).

123. *Dans le développement*

$$(15) \quad \begin{cases} f[(x' + x'' + \ldots), (y' + y'' + \ldots), \ldots] \\ \quad = \Sigma(b_{m', m'', \ldots, n', n'', \ldots, \ldots} x'^{m'} x''^{m''} \ldots y'^{n'} y''^{n''} \ldots) \end{cases}$$

de l'expression (6) *en série procédant ainsi suivant les puissances entières des nouvelles variables* (8), *le coefficient du terme général est donné par la formule*

$$(16) \quad \begin{cases} b_{m', m'', \ldots, n', n'', \ldots, \ldots} \\ \quad = \dfrac{(m' + m'' + \ldots)!}{m'!\, m''! \ldots} \dfrac{(n' + n'' + \ldots)!}{n'!\, n''! \ldots} \cdots a_{m'+m''+\ldots, n'+n''+\ldots, \ldots, \ldots}. \end{cases}$$

Les divers termes du développement (15), où x', x'', ... sont affectés d'exposants donnés m', m'', ..., ne peuvent évidemment provenir que des développements des termes de (1) où m a la valeur

$$m' + m'' + \ldots.$$

Celui que nous y avons mis en évidence sous le signe Σ ne peut

donc se trouver que dans le développement de l'expression (9) pour

$$m = m' + m'' + \ldots, \qquad n = n' + n'' + \ldots, \qquad \ldots.$$

Cette observation combinée avec la formule du binôme (122) conduit immédiatement à la formule (16).

Nous attirons dès à présent toute l'attention du lecteur sur le théorème du n° 120, qui peut être considéré comme l'extension aux séries entières de la propriété qui appartient à un simple monôme en vertu du théorème de Newton rappelé ci-dessus (122). Il sert effectivement de base à la plupart des propriétés des fonctions et notamment à l'existence de leurs dérivées (155, *inf.*).

Continuité.

124. *Quand les variables d'une série entière*

$$(1) \qquad f(x, y, \ldots) = \Sigma(a_{m,n\ldots} x^m y^n \ldots)$$

tendent simultanément vers les valeurs particulières x', y', ... tombant toutes à l'intérieur de cercles de convergence, on a

$$\lim f(x, y, \ldots) = f(x', y', \ldots).$$

I. Supposons d'abord que l'on ait $x' = y' = \ldots = 0$, par suite $f(x', y', \ldots) = f(0, 0, \ldots) = a_{0,0\ldots}$. Comme les modules ξ, η, ... des variables sont infiniment petits, ils finissent par demeurer respectivement inférieurs à des quantités positives R'_x, R'_y, ... prises plus petites que les rayons de convergence ; les modules des termes de la série (1) finiront donc par former sans cesse une série convergente (116, II), et l'on pourra déplacer ces termes, les sommer partiellement d'une manière arbitraire (116, III). Sauf le premier $a_{0,0,\ldots}$, tous sont divisibles par l'une au moins des variables et peuvent ainsi être groupés en séries partielles dans lesquelles on pourra mettre respectivement x, y, ... en facteurs. On aura de cette manière

$$f(x, y, \ldots) = a_{0,0,\ldots} + Xx + Yy + \ldots,$$

X, Y, ... désignant les sommes de nouvelles séries entières ayant

toutes mêmes cercles de convergence que la proposée (**116**, V), sommes aux modules desquelles on pourra en conséquence assigner certaines limites supérieures Ξ, H, ... indépendantes de $x, y, \ldots$, aussitôt que ξ, η, ... resteront inférieurs à R'_x, R'_y, ... (**117**).

D'après cela, la relation précédente donne

$$\text{mod}[f(x, y, \ldots) - a_{0,0,\ldots}] < \Xi\xi + H\eta + \ldots;$$

la différence $f(x, y, \ldots) - a_{0,0,\ldots}$ est donc infiniment petite, comme il fallait le prouver.

II. Supposons maintenant que $x', y', \ldots$ soient placées arbitrairement à l'intérieur des cercles de convergence, et posons

$$x - x' = h, \quad y - y' = k, \quad \ldots,$$

d'où

$$x = x' + h, \quad y = y' + k, \quad \ldots.$$

Comme les différences h, k, ... sont toutes infiniment petites et que les modules de x', y', ... sont inférieurs aux rayons de convergence, les sommes

$$\text{mod}\, x' + \text{mod}\, h, \quad \text{mod}\, y' + \text{mod}\, k, \quad \ldots$$

finissent par demeurer inférieures aux mêmes rayons. A partir de ce moment, on pourra donc (**120**) transformer

$$f(x, y, \ldots) = f[(x' + h), (y' + k), \ldots]$$

en une série entière par rapport à $x', y', \ldots, h, k, \ldots$. La formule (16) du n° **123** montre immédiatement que, dans cette nouvelle série, la sommation des termes indépendants de h, k, ... reproduit précisément $f(x', y', \ldots)$. En l'ordonnant donc par rapport à ces variables (**116**, VI), on trouve une série entière en $h, k, \ldots$ ayant $f(x', y', \ldots)$ pour premier terme. Donc (I), pour h, k, ... infiniment petits, c'est-à-dire pour $\lim x = x'$, $\lim y = y'$, ..., la somme $f(x, y, \ldots)$ de cette série tend vers $f(x', y', \ldots)$, ce qui achève notre démonstration.

125. Une fonction est dite *continue* : 1° *en* $x = a, y = b, \ldots$, quand $f(x, y, \ldots)$ tend vers $f(a, b, \ldots)$, lorsque $x, y, \ldots$ ten-

dent simultanément vers a, b, ...; 2° *dans des aires données*, quand elle est continue en tout système de valeurs particulières des variables prises dans ces aires.

D'après cette définition et le théorème précédent, *la somme d'une série entière est une fonction continue de ses variables à l'intérieur de ses cercles de convergence.*

126. De l'intérieur des cercles de convergence, la continuité d'une série entière peut s'étendre jusqu'à certains points de leurs circonférences; c'est ce qui a lieu en particulier dans le cas suivant.

Soient

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m + \ldots \tag{2}$$

une série entière à une seule variable x, dont les termes sont rangés dans l'ordre croissant de leurs exposants, et x' une valeur particulière de x, dont le module ξ' est précisément le rayon de convergence de la série.

Si cette série est encore convergente pour $x = x'$, on aura

$$\lim f(x) = f(x')$$

pour $\lim x = x'$, *à condition toutefois qu'en tendant vers x' x reste à l'intérieur du cercle de convergence, et qu'en appelant ξ son module, Θ quelque quantité positive invariable, on ait toujours*

$$\frac{\operatorname{mod}(x' - x)}{\xi' - \xi} < \Theta. \tag{3}$$

I. Supposons d'abord $x' = 1$, d'où

$$f(x') = f(1) = a_0 + a_1 + \ldots + a_m + \ldots, \tag{4}$$

série convergente par hypothèse. On a évidemment

$$\left\{ \begin{aligned} f(1) - f(x) = (1 - x)[a_1 + a_2(1 + x) + \ldots \\ + a_m(1 + x + \ldots + x^{m-1}) + \ldots], \end{aligned} \right. \tag{5}$$

et la somme de la série entre crochets est égale à celle de

$$R_0 + R_1 x + \ldots + R_{m-1} x^{m-1} + \ldots,$$

R_m désignant le reste de la série (4) arrêtée à son terme d'indice m. Effectivement, l'excès de la somme des m premiers termes de cette dernière série sur la même somme pour la série entre crochets se réduit à

$$R_m + R_m x + \ldots + R_m x^{m-1} = R_m \frac{1 - x^m}{1 - x},$$

quantité infiniment petite pour m infini à cause de $\lim R_m = 0$ et de $\xi < 1$, d'où $\lim x^m = 0$ (52, I).

La relation (5) devient ainsi

$$f(1) - f(x) = (1 - x)(R_0 + R_1 x + \ldots + R_{m-1} x^{m-1} + R_m x^m + \ldots),$$

et donne facilement

$$\begin{aligned} &\operatorname{mod}[f(1) - f(x)] \\ &\quad < \operatorname{mod}(1 - x) \operatorname{mod}(R_0 + \ldots + R_{m-1} x^{m-1}) \\ &\qquad + \operatorname{mod}(1 - x) \rho_m (\xi^m + \xi^{m+1} + \ldots) \\ &\quad < \operatorname{mod}(1 - x) \operatorname{mod}(R_0 + \ldots + R_{m-1} x^{m-1}) + \rho_m \xi^m \Theta, \end{aligned}$$

ρ_m désignant le plus grand des modules de R_m, R_{m+1}, R_{m+2}, ... Si donc on fait tendre x vers 1 en laissant m invariable, cette inégalité montre que $\operatorname{mod}[f(1) - f(x)]$ finit par rester inférieur à une quantité positive différant aussi peu qu'on le veut de $\rho_m \Theta$. Ce module tend donc nécessairement vers zéro, puisque Θ est invariable et que la petitesse de ρ_m est arbitraire.

II. Quand x' n'est pas $= 1$, on pose

$$\frac{x}{x'} = y, \qquad \frac{\xi}{\xi'} = \eta, \qquad a_m x'^m = b_m,$$

d'où

$$f(x) = g(y) = b_0 + b_1 y + \ldots,$$

série entière admettant 1 pour rayon de convergence. Maintenant, y tend vers 1 en restant à l'intérieur du cercle de convergence de cette nouvelle série, et l'on a constamment

$$\frac{\operatorname{mod}(1 - y)}{1 - \eta} = \frac{\operatorname{mod}(x' - x)}{\xi' - \xi} < \Theta.$$

On a donc (I)

$$\lim f(x) = \lim g(y) = g(1) = f(x').$$

La condition (3) est toujours remplie en particulier, quand le point x se meut sur le rayon vecteur allant de l'origine au point x', car alors son premier membre se réduit constamment à 1.

127. Les commençants, auxquels la continuité des expressions analytiques est trop souvent présentée comme une sorte de dogme, pourront avoir quelque peine à sentir la nécessité des démonstrations précédentes. D'ailleurs on a cru longtemps que la continuité des termes d'une série entraînait forcément celle de sa somme. Il n'est donc pas inutile de montrer par quelques exemples que les choses ne se passent pas toujours ainsi.

1° Appelons $f(x)$ la somme de la série

$$\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots, \tag{6}$$

qui admet 1 pour rayon de convergence (118) et qui est encore convergente pour $x = 1$ (103). Cette série remplit les conditions de l'énoncé précédent (126), et l'on a

$$\lim f(x) = f(1) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots,$$

quand x tend vers 1 en restant par exemple positif et < 1, car alors $\operatorname{mod} x = x$, $\operatorname{mod}(1 - x) = 1 - x$ et le premier membre de l'inégalité (3) se réduit constamment à 1.

La série

$$F(x) = \frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} - \frac{x^4}{4} + \ldots$$

est convergente aussi pour $\operatorname{mod} x < 1$, car elle résulte d'une simple permutation des termes de la précédente (6), opération qui est permise, puisque nous raisonnons à l'intérieur de son cercle de convergence (116, III). De plus, on a pour la même raison

$$F(x) = f(x) \qquad \text{d'où} \qquad \lim F(x) = \lim f(x) = f(1).$$

On n'a donc pas $\lim F(x) = F(1)$, puisque $F(1) = \frac{3}{2} f(1)$ (106), et qu'évidemment $f(1)$ n'est pas $= 0$.

2° La série

$$x(1 - x) + x^2(1 - x^2) + \ldots + x^n(1 - x^n) + \ldots$$

est convergente pour x réelle positive et < 1; car la somme de ses n premiers termes peut s'écrire

$$(x+x^2+\ldots+x^n)-(x^2+x^4+\ldots+x^{2n})=\frac{x(1-x^n)}{1-x}-\frac{x^2(1-x^{2n})}{1-x^2},$$

quantité qui, pour n infini, a pour limite

$$\frac{x}{1-x}-\frac{x^2}{1-x^2}=\frac{x}{1-x^2}.$$

Elle l'est encore pour $x=1$, parce que tous ses termes s'évanouissent.

En appelant donc $\varphi(x)$ sa somme, on a

$$\varphi(1)=0$$

et

$$\varphi(x)=\frac{x}{1-x^2}, \quad \text{pour } x \text{ réelle positive} < 1.$$

Si donc dans cette dernière hypothèse, on fait tendre x vers 1, $\varphi(x)$ est infinie, et, par suite, n'a pas $\varphi(1)$ pour limite.

Tout à l'heure (1°) la série considérée était entière, et l'anomalie provenait de ce que les termes n'étaient rangés par degrés croissants, de ce qu'il s'agissait d'une valeur de la variable tombant *sur* la circonférence du cercle de convergence. Ici (2°) c'est la série qui n'est plus entière, parce que les termes sont des binômes au lieu d'être des monômes dissemblables.

128. *Si la série entière*

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots,$$

ayant des coefficients réels positifs, avec R *pour rayon de convergence maximum, est divergente pour* $x=\mathrm{R}$, *sa somme augmente indéfiniment pour des valeurs positives de* x *tendant vers* R.

Car, si x varie en croissant, $f_m(x)$, somme des $m+1$ premiers termes, tend en croissant toujours aussi vers $f_m(\mathrm{R})$, quantité positive qui elle-même croît indéfiniment avec m (**102**, I); $f(x)$ qui croît évidemment avec x et qui est sans cesse $>f_m(x)$, devient donc et reste ensuite supérieure à toute quantité positive donnée.

Valeur remarquable accessible au module de la somme d'une série entière.

129. Nous passons à une propriété des séries entières peu intéressante en elle-même, mais néanmoins d'une importance considérable, parce qu'elle sert de point d'appui à la plupart des théories générales que nous aurons bientôt à exposer. Établissons tout d'abord un lemme qui va nous être indispensable.

Il existe quelque quantité θ *de module* 1, *dont aucune des puissances marquées par les exposants positifs ou négatifs quelconques, mais non nuls,* $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, ..., $\mathfrak{s}$, *ne se réduit à* 1.

Comme aucun des polynômes entiers en x

$$x^{\pm\mathfrak{m}} - 1, \quad x^{\pm\mathfrak{n}} - 1, \quad \ldots, \quad x^{\pm\mathfrak{s}} - 1$$

n'est identiquement nul, le nombre des valeurs inégales de x, qui les annulent, ne peut surpasser $\pm\mathfrak{m}$ pour le premier, $\pm\mathfrak{n}$ pour le second, ... $\pm\mathfrak{s}$ pour le dernier (412, *inf.*); dès lors, le nombre de celles qui annulent l'un ou l'autre indistinctement, ne peut s'élever au-dessus de $\pm\mathfrak{m}\pm\mathfrak{n}\pm\ldots\pm\mathfrak{s}$. Tout groupe de

$$\pm\mathfrak{m}\pm\mathfrak{n}\pm\ldots\pm\mathfrak{s}+1$$

quantités inégales de modules $=1$, en contiendra donc une au moins θ qui n'annulera aucun de ces polynômes, qui donnera ainsi

$$(1) \qquad \theta^{\mathfrak{m}} \text{ non } = 1, \qquad \theta^{\mathfrak{n}} \text{ non } = 1, \qquad \ldots, \qquad \theta^{\mathfrak{s}} \text{ non } = 1.$$

130. Voici maintenant l'énoncé du théorème en question.

Représentons par

$$(2) \qquad f(x, y, \ldots) = \Sigma(a_{m,n,\ldots} x^m y^n \ldots)$$

la somme d'une série entière admettant

$$\mathrm{R}_x, \quad \mathrm{R}_y, \quad \ldots$$

pour rayons de convergence, par r_x, r_y, ... *d'autres quan-*

tités positives satisfaisant aux conditions

$$r_x < R_x, \quad r_y < R_y, \quad \ldots,$$

et par $\alpha_{m,n,\ldots}$ *le module du coefficient du terme général.*

Parmi les valeurs de x, y, ... *ayant* r_x, r_y, ... *pour modules, et pour toutes lesquelles le module de* $a_{p,q,\ldots}x^p y^q \ldots$, *terme choisi à volonté dans la série* (2), *conserve la valeur invariable* $\alpha_{p,q,\ldots} r_x^p r_y^q \ldots$, *se trouve au moins un système* X, Y, ... *rendant*

$$\operatorname{mod} f(X, Y, \ldots) \geqq \alpha_{p,q,\ldots} r_x^p r_y^q \ldots.$$

Nous avons prouvé ailleurs que cette relation peut toujours être réalisée avec le signe exclusif $>$, sauf le cas où la série proposée dégénère en un monôme ; mais, en nous contentant de l'alternative qui nous est suffisante, nous simplifierons considérablement la démonstration.

I. Nous supposerons en premier lieu que la série (2) se réduit à un polynôme entier à une seule variable x

$$(3) \qquad f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_p x^p + \ldots + a_k x^k,$$

et qu'il s'agit de prouver l'existence d'une quantité X de module r rendant

$$(4) \qquad \operatorname{mod} f(X) \geqq \alpha_p r^p.$$

Si $\alpha_p = 0$ la chose est évidente ; sinon nous raisonnerons comme il suit :

1° *Si, conservant les notations ci-dessus* (**129**), *on pose*

$$\varphi(x) = \mathfrak{a} + \mathfrak{a}_m x^m + \mathfrak{a}_n x^n + \ldots + \mathfrak{a}_s x^s,$$

où $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_m$, ..., $\mathfrak{a}_s$ *sont des constantes quelconques, puis*

$$\Phi_m(x) = \varphi(x) + \varphi(\theta x) + \varphi(\theta^2 x) + \ldots + \varphi(\theta^{m-1} x),$$

on a, pour m infini,

$$(5) \qquad \lim \frac{\Phi_m(x)}{m} = \mathfrak{a},$$

quelle que soit la valeur particulière attribuée à x.

Les inégalités (1) permettent d'écrire

$$\Phi_m(x) = m\mathfrak{a} + \left[\frac{1-\theta^{m\mathfrak{m}}}{1-\theta^{\mathfrak{m}}}\mathfrak{a}_{\mathfrak{m}}x^{\mathfrak{m}} + \frac{1-\theta^{m\mathfrak{n}}}{1-\theta^{\mathfrak{n}}}\mathfrak{a}_{\mathfrak{n}}x^{\mathfrak{n}} + \ldots + \frac{1-\theta^{m\mathfrak{s}}}{1-\theta^{\mathfrak{s}}}\mathfrak{a}_{\mathfrak{s}}x^{\mathfrak{s}}\right],$$

où l'expression entre crochets est finie, parce que les modules de $\theta^{m\mathfrak{m}}$, ... conservent la valeur 1 quel que soit m, et qu'ainsi ceux des numérateurs $1-\theta^{m\mathfrak{m}}$, ... ne peuvent jamais surpasser 2. On obtient donc la relation (5), en divisant par m les deux membres de la dernière et y supposant ensuite cet entier infini.

2° En attribuant enfin à x une valeur particulière quelconque x_0 de module r, on tirera de la relation (3)

$$x_0^{-p}f(x_0) = a_p + a_0x_0^{-p} + a_1x_0^{-p+1} + \ldots + a_{p-1}x_0^{-1} + a_{p+1}x_0 + \ldots + a_kx_0^{k-p},$$

moyennant quoi, si l'on choisit une quantité θ de module 1 dont les puissances d'exposants non nuls

$$-p, \quad -p+1, \quad \ldots, \quad -1, \quad +1, \quad \ldots, \quad k-p$$

soient toutes non $=1$ (**129**), les quantités

$$x_0, \qquad x^{(1)} = \theta x_0, \qquad x^{(2)} = \theta^2 x_0, \qquad \ldots, \qquad x^{(m-1)} = \theta^{m-1}x_0$$

auront toutes r pour module et donneront (1°)

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{m}[f(x_0) + \theta^{-p}f(x^{(1)}) + \theta^{-2p}f(x^{(2)}) + \ldots \\ &\qquad + \theta^{-(m-1)p}f(x^{(m-1)})] = a_px_0^p + e_m, \end{aligned}\right.$$

où e_m est une quantité infiniment petite pour m infini.

Les modules des termes de l'expression entre crochets sont précisément ceux de

$$f(x_0), \quad f(x^{(1)}), \quad f(x^{(2)}), \quad \ldots, \quad f(x^{(m-1)}),$$

parce que $\operatorname{mod}\theta^{-ip} = (\operatorname{mod}\theta)^{-ip} = 1$; en représentant donc par $f(x_m)$ une de ces quantités dont le module n'est inférieur à aucun de ceux des autres, par ε_m le module infiniment petit de e_m et en prenant les modules des deux membres de la relation (6), il vient

$$(7)\qquad \frac{m \operatorname{mod} f(x_m)}{m} = \operatorname{mod} f(x_m) \geqq \alpha_p r^p - \varepsilon_m,$$

dès que l'on commence à avoir sans cesse $\varepsilon_m < \alpha_p r^p$.

Les quantités

$$x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_m, \quad \ldots$$

tombant toutes sur la circonférence décrite de l'origine pour centre avec r pour rayon, c'est-à-dire à l'intérieur de quelque aire limitée, on peut (91) extraire de leur suite une autre suite partielle

$$x_{m_1}, \quad x_{m_2}, \quad \ldots, \quad x_{m_n}, \quad \ldots$$

dont le terme général x_{m_n} tend vers une certaine limite X, et l'on a $\operatorname{mod} X = r$, parce qu'on a constamment $\operatorname{mod} x_{m_n} = r$ et que la relation $\lim x_{m_n} = X$ entraîne $\lim(\operatorname{mod} x_{m_n}) = \operatorname{mod} X$ (79).

On a de plus (81)

$$f(X) = \lim f(x_{m_n})$$

et par suite (79)

$$\operatorname{mod} f(X) = \lim[\operatorname{mod} f(x_{m_n})].$$

La relation (4) a donc lieu; car l'inégalité indéfinie (7) a pour conséquence particulière

$$\operatorname{mod} f(x_{m_n}) \geqq \alpha_p r^p - \varepsilon_{m_n}$$

avec

$$\lim \varepsilon_{m_n} = 0,$$

ce qui donne

$$\lim[\operatorname{mod} f(x_{m_n})] \geqq \alpha_p r^p.$$

II. Supposons en second lieu qu'il s'agisse d'une véritable série illimitée

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_p x^p + \ldots$$

dépendant d'une seule variable x à laquelle on attribue exclusivement des valeurs d'un module constant r inférieur à quelque rayon de convergence R, et représentons par $f_{p+m}(x)$, $e_{p+m}(x)$ la somme de ses $p+m+1$ premiers termes et le reste correspondant.

Comme $f_{p+m}(x)$ est un polynôme entier en x qui contient, quel que soit m, le terme $a_p x^p$, on peut (I) construire une suite illimitée de valeurs de x, toutes de modules $= r$,

$$(8) \qquad x_0, \quad x_1, \quad \ldots, \quad x_m, \quad \ldots$$

qui donnent sans cesse

(9) $$\operatorname{mod} f_{p+m}(x_m) \geqq \alpha_p r^p;$$

en outre, on aura certainement pour m infini

(10) $$\lim e_{p+m}(x_m) = 0,$$

parce que les quantités (8) sont évidemment toutes intérieures à quelque cercle de rayon $< R$ (117).

Pour cette même raison, on peut encore (91) extraire de cette suite une suite partielle dont le terme général x_{m_n} de module constant r tend vers quelque limite X de module r aussi.

D'autre part, les relations (9), (10) donnent en particulier

$$\operatorname{mod} f_{p+m_n}(x_{m_n}) \geqq \alpha_p r^p$$

quel que soit n, avec

$$\lim e_{p+m_n}(x_{m_n}) = 0$$

pour n infini.

Ces conclusions combinées avec l'identité constante

$$f(x) = f_{p+m_n}(x) + e_{p+m_n}(x)$$

entraînent la relation finale

$$\begin{aligned} \operatorname{mod} f(x_{m_n}) &\geqq \operatorname{mod} f_{p+m_n}(x_{m_n}) - \operatorname{mod} e_{p+m_n}(x_{m_n}) \\ &\geqq \alpha_p r^p - \operatorname{mod} e_{p+m_n}(x_{m_n}), \end{aligned}$$

puis, comme tout à l'heure (I, 2°),

$$\operatorname{mod} f(X) \geqq \alpha_p r^p,$$

à cause de la continuité à l'intérieur du cercle de convergence, tant de la somme de la série $f(x)$ (125), que de $\operatorname{mod} f(x)$ (79).

III. Si enfin, appelant h le nombre des variables de la série proposée (2), on suppose notre proposition établie pour toutes celles dépendant de 1, 2, ..., $(h-1)$ variables, ordonnons cette série par rapport à x de manière à avoir

$$f(x, y, \ldots) = A_0 + A_1 x + \ldots + A_p x^p + \ldots + A_m x^m + \ldots,$$

où A_0, A_1, ... sont des séries entières en y, ... seulement, admettant R_y, ... pour rayons de convergence.

Comme la série $A_p(y, \ldots)$ contient le terme $a_{p,q,\ldots}y^q \ldots$, on peut par hypothèse trouver pour y, ... des valeurs Y, ... de modules r_y, ... donnant

$$\operatorname{mod} A_p(Y, \ldots) \geqq \alpha_{p,q,\ldots} r_y^q \ldots,$$

puis (II) trouver pour x une valeur X de module r_x donnant

$$\operatorname{mod} f(X, Y, \ldots) \geqq \operatorname{mod} A_p(Y, \ldots) r_x^p.$$

Or la combinaison de ces deux inégalités donne, *a fortiori*,

$$\operatorname{mod} f(X, Y, \ldots) \geqq \alpha_{p,q,\ldots} r_x^p r_y^q, \quad \ldots,$$

ce qui étend à notre série de h variables le théorème en question supposé établi pour $h - 1$ seulement. Il est donc général, puisqu'il est vrai pour $h = 1$ (II).

131. *En appelant* M *une quantité positive supérieure au module de la somme de la série* (2) *pour toutes les combinaisons des valeurs de x, y, ... qui ont r_x, r_y, ... pour modules* (**117**), *on a, quels que soient les indices m, n, ...,*

$$(11) \qquad \alpha_{m,n,\ldots} < \frac{M}{r_x^m r_y^n \ldots}.$$

Car, en appelant $X_{m,n,\ldots}$, $Y_{m,n,\ldots}$, ... les systèmes des valeurs de x, y, ..., de modules r_x, r_y, ..., qui donnent (**130**)

$$\operatorname{mod} f(X_{m,n,\ldots}, Y_{m,n,\ldots}, \ldots) \geqq \alpha_{m,n,\ldots} r_x^m r_y^n \ldots,$$

on a toujours, par suite de l'hypothèse,

$$M > \operatorname{mod} f(X_{m,n,\ldots}, Y_{m,n,\ldots}, \ldots),$$

d'où

$$M > \alpha_{m,n,\ldots} r_x^m r_y^n \ldots.$$

132. La proposition précédente permet d'assigner à la somme de la série formée par les modules des termes d'une série entière une limite supérieure d'une forme spéciale dont nous aurons à faire usage.

Soient

$$(12) \qquad R'_x, \quad R'_y, \quad \ldots$$

des quantités positives respectivement inférieures aux rayons de convergence de la série (2), *et* M *la limite supérieure qu'on peut assigner à* mod $f(x, y, \ldots)$ *sur les circonférences de cercles de rayons* R'_x, R'_y, ... *ayant les origines pour centres* (117). *Pour tous modules* $\xi, \eta, \ldots$ *des variables, inférieurs aux quantités* (12), *on a*

$$(13) \qquad \Sigma(\alpha_{m,n,\ldots}\xi^m\eta^n\ldots) < \frac{M}{\left(1-\frac{\xi}{R'_x}\right)\left(1-\frac{\eta}{R'_y}\right)\cdots}.$$

L'inégalité (11), employée dans le cas qui nous occupe, donne immédiatement

$$\alpha_{m,n,\ldots} < M\,\frac{1}{R'^m_x}\,\frac{1}{R'^n_y}\cdots,$$

d'où l'on tire

$$\Sigma(\alpha_{m,n,\ldots}\xi^m\eta^n\ldots) < M\sum\left[\left(\frac{\xi}{R'_x}\right)^m\left(\frac{\eta}{R'_y}\right)^n\cdots\right],$$

puis la formule (13) en sommant cette progression géométrique aux raisons $\frac{\xi}{R'_x}, \frac{\eta}{R'_y}, \ldots$ toutes < 1 (113).

133. *Si la série* (2) *contient quelque terme effectif de degré* > 0, *et si ses rayons de convergence sont illimités, c'est-à-dire si elle converge pour tout système de valeurs attribuées aux variables, on peut faire varier ces dernières de manière à rendre infini le module de sa somme.*

Soit $a_{p,q,\ldots}x^p y^q\ldots$ un terme de cette espèce, où l'un des exposants $p, q, \ldots$ est au moins égal à 1, et où $a_{p,q,\ldots}$ non $= 0$. Parmi les valeurs des variables qui ont des modules donnés r_x, r_y, ..., il en existe quelque système rendant

$$\text{mod}\, f(x, y, \ldots) \geqq \alpha_{p,q,\ldots} r_x^p r_y^q \ldots, \quad (130).$$

On peut donc faire croître le premier membre de cette inégalité au delà de toute quantité donnée, puisque, d'une part, rien par

hypothèse ne limite la grandeur de r_x, r_y, ..., et que, d'autre part, le second membre est infini quand ces modules le sont tous eux-mêmes.

Conditions pour que la somme d'une série entière soit nulle identiquement, pour que celles de deux semblables séries soient égales identiquement.

134. *Si la série entière*

$$f(x, y, \dots) = \Sigma a_{m,n,\dots} x^m y^n \dots \tag{1}$$

admet des rayons de convergence R_x, R_y, ..., *tous différents de zéro, la condition nécessaire et suffisante pour que sa somme soit nulle identiquement, c'est-à-dire pour tout système des valeurs de* x, y, ... *intérieures aux cercles de convergence, est que ses coefficients* $a_{m,n,\dots}$ *se réduisent tous à zéro.*

Cette condition, évidemment suffisante, n'est pas moins nécessaire; car, si le coefficient $a_{p,q,\dots}$, par exemple, n'était pas nul, en appelant r_x, r_y, ... des quantités positives inférieures à R_x, R_y, ... respectivement, $\alpha_{p,q,\dots} r_x^p r_y^q \dots$ module du terme correspondant ne serait pas nul, et il existerait (130) des quantités X, Y, ... de modules r_x, r_y, ... qui donneraient

$$\operatorname{mod} f(X, Y, \dots) \geqq \alpha_{p,q,\dots} r_x^p r_y^q \dots,$$

et par suite

$$f(X, Y, \dots) \text{ non } = 0.$$

135. Nous donnerons de ce dernier point une démonstration toute différente reposant sur la proposition suivante qui nous sera utile ailleurs.

Soient R'_x, R'_y, ... *des quantités positives quelconques respectivement inférieures à* R_x, R_y, ..., *et*

$$\left\{\begin{array}{l} x_1, \quad x_2, \quad \dots, \quad x_p, \quad \dots\dots\dots \\ y_1, \quad y_2, \quad \dots\dots\dots, \quad y_q, \quad \dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right. \tag{2}$$

des suites illimitées, dans chacune desquelles les termes sont tous numériquement inégaux, avec des modules non supérieurs

à R'_x, *pour la première, à* R'_y *pour la seconde, etc. Si l'on a numériquement*

$$(3) \qquad f(x_p, y_q, \ldots) = 0,$$

pour toute combinaison de valeurs des rangs p, q, ..., *on aura aussi*

$$a_{m,n,\ldots} = 0,$$

quels que soient les indices m, n, ...

I. Considérons d'abord le cas d'une seule variable x, où il s'agit de

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots;$$

supposons qu'on ait $\lim x_p = 0$, et qu'on ait démontré la nullité des premiers coefficients jusqu'à a_μ exclusivement. Il reste ainsi

$$f(x) = x^\mu f_\mu(x),$$

en posant, pour abréger,

$$f_\mu(x) = a_\mu + a_{\mu+1} x + \ldots,$$

série entière ayant même rayon de convergence que la proposée (116, V). Comme x_p prend une infinité de valeurs non $= 0$, l'égalité indéfinie $x_p^\mu f_\mu(x_p) = 0$ entraîne aussi $f_\mu(x_p) = 0$, par suite $\lim f_\mu(x_p) = 0 = f_\mu(0) = a_\mu$ (124). En prenant donc successivement $\mu = 0, 1, 2, \ldots$, il vient indéfiniment

$$a_0 = a_1 = a_2 = \ldots = 0,$$

comme il fallait le constater.

II. Supposons que le nombre h des variables soit quelconque, que l'on ait $\lim x_p = \lim y_q = \ldots = 0$, que le point en question ait été établi pour moins de h variables, et ordonnons la série (1) par rapport à x, de manière à lui donner la forme

$$A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots,$$

où $A_0, A_1, A_2, \ldots$ sont maintenant des séries entières en y, z, ... seulement.

Pour un système donné de valeurs de ces dernières variables

appartenant aux $h-1$ dernières suites (2), la somme de cette série est supposée s'évanouir quand x prend une valeur quelconque figurant dans la première suite. Il en résulte (I)

$$A_0 = A_1 = A_2 = \ldots = 0.$$

Donc, en vertu de l'hypothèse, les coefficients de ces séries entières sont tous nuls, parce que les valeurs des variables constituant le système considéré peuvent être choisies arbitrairement dans les $h-1$ suites dont il s'agit. Mais l'ensemble de ces coefficients est précisément celui des coefficients de la série proposée (1); donc ces derniers sont tous nuls.

III. Nous passons sous silence le cas où les suites (2) sont quelconques, parce qu'il est renfermé dans un théorème plus général que nous démontrerons plus tard (**188**, *inf.*) et que sa connaissance nous est inutile en ce moment.

136. Le théorème du n° **134** résulte immédiatement du précédent; car, si $f(x, y, \ldots)$ est nulle identiquement, l'égalité (3) a lieu pour toute composition des suites (2) : en particulier, pour celle consistant à donner zéro pour limite commune à tous leurs termes généraux.

137. *Pour que les sommes des deux séries entières dépendant des mêmes variables*

$$\Sigma(a_{m,n,\ldots}x^m y^n \ldots), \qquad \Sigma(b_{m,n,\ldots}x^m y^n \ldots)$$

soient égales identiquement, il faut et il suffit que les coefficients de leurs termes semblables soient toujours égaux respectivement.

L'égalité en question équivaut à

$$\Sigma(a_{m,n,\ldots}x^m y^n \ldots) - \Sigma(b_{m,n,\ldots}x^m y^n \ldots) = \Sigma[(a_{m,n,\ldots} - b_{m,n,\ldots})x^m y^n \ldots] = 0$$

identiquement, d'où indéfiniment $a_{m,n,\ldots} - b_{m,n,\ldots} = 0$, c'est-à-dire $a_{m,n,\ldots} = b_{m,n,\ldots}$ (**134**).



CHAPITRE VI.

DÉRIVÉES DES FONCTIONS OLOTROPES. — GENÈSE HABITUELLE DE CES FONCTIONS.

Définitions.

138. L'étude des principales opérations générales qui donnent naissance à de nouvelles fonctions nous révélera successivement (Chap. VIII, IX, X, XI, XII, *inf.*) un fait qui domine toute l'Analyse infinitésimale et dont cette Science est, selon nous, le simple développement des innombrables conséquences; le lecteur en a déjà été prévenu (1). Quand les fonctions déjà connues qui sont impliquées dans les calculs sont représentables par des séries entières de la manière qui va être précisée dans un instant, les nouvelles fonctions qu'ils engendrent le sont également, excepté toutefois pour certaines valeurs particulières des variables qui sont toujours assignables *a priori*. Et, comme les fonctions analytiques forment ainsi une chaîne continue ayant les polynômes entiers pour premier anneau, on est autorisé à dire en gros qu'*elles sont toutes aussi développables en séries entières.*

Cette assertion générale n'est pas contredite par l'étude d'autres modes spéciaux de génération des fonctions, qui tiennent dans l'Analyse une place bien moindre (sommation de séries de fonctions simples, formation de séries factorielles, etc.); en outre, et il importe de le remarquer, *elle s'accorde entièrement avec le principe essentiel admis tacitement par tous ceux qui cherchent à renfermer dans des formules mathématiques les résultats de l'observation des phénomènes naturels.* Beaucoup de ces formules sont des polynômes entiers auxquels des observations de plus en plus précises ajoutent successivement des termes qui en augmentent l'exactitude, c'est-à-dire des séries entières limitées par l'imperfection de nos sens et de nos instruments. Or une

pareille méthode n'aurait pas été couronnée d'un succès constant, si les fonctions qui représenteraient exactement les phénomènes naturels n'étaient pas aussi développables en séries entières, fait que nous pourrions d'ailleurs rattacher très étroitement à celui que nous signalions en commençant.

Comme, d'autre part, les raisonnements appuyés sur cette propriété générale des fonctions imitent tout à fait ceux de l'Algèbre élémentaire et peuvent être amenés sans peine au plus haut degré de rigueur et d'élégance, nous la prenons pour base de toute notre théorie. Il nous faut donc, tout d'abord, un vocabulaire spécial pour l'invoquer facilement.

139. La manière la plus simple de relier entre elles, par la pensée, diverses valeurs particulières attribuées à une même variable indépendante, consiste à considérer chacune d'elles comme déduite de la précédente par l'*addition* d'un certain *accroissement*. Elle est d'autant plus conforme à la nature intime des choses, que l'addition *physique* (ou la soustraction) intervient essentiellement dans la comparaison de grandeurs concrètes similaires. On est conduit ainsi, à chaque instant, à étudier la valeur indéterminée $f(x_0+h, y_0+k, \ldots)$ que fait acquérir à une fonction donnée $f(x, y, \ldots)$ l'attribution à ses variables indépendantes d'accroissements variables $h, k, \ldots$ *à partir* des valeurs particulières $x_0, y_0, \ldots$ fixées pour un instant; c'est ce que nous avons déjà fait avec grand profit pour les séries entières (**124**, II).

Cela posé, nous dirons que la fonction $f(x, y, \ldots)$ est *olotrope* en $x_0, y_0, \ldots$, avec des *olomètres* au moins égaux à $\delta_x, \delta_y, \ldots$ quantités positives données de grandeurs quelconques, quand $f(x_0+h, y_0+k, \ldots)$ peut se développer en une série entière par rapport à $h, k, \ldots$, admettant $\delta_x, \delta_y, \ldots$ pour rayons de convergence (**116**). On dit que ce développement est fait *à partir de* $x_0, y_0, \ldots$, et, relativement à lui, on nomme ces quantités et $f(x_0, y_0, \ldots)$ les valeurs *initiales* des variables et de la fonction.

Nous dirons encore que $f(x, y, \ldots)$ est *olotrope* dans des aires données $S_x, S_y, \ldots$ (**89**) (**90**), avec les *olomètres* (invariables) δ_x, $\delta_y, \ldots$, quand elle jouit de cette propriété en tout système de valeurs initiales des variables prises respectivement à l'intérieur de ces aires, c'est-à-dire, nous le répétons, quand $f(x+h, y+k, \ldots)$

est représentable par une série entière convergente en h, k, ..., dès que d'une part x, y, ... tombent dans S_x, S_y, ..., que d'autre part les modules de h, k, ... sont inférieurs à δ_x, δ_y, ...

La configuration des aires S_x, S_y, ... varie avec la nature propre de la fonction considérée, cela va sans dire. Quelquefois ces aires sont indéfinies, c'est-à-dire que rien ne limite leur forme et leur grandeur; nous dirons alors que la fonction est *indéfiniment* olotrope.

L'*existence* même des olomètres, c'est-à-dire ce fait que les séries entières dont nous parlons sont convergentes pour certains modules des accroissements tous différents de zéro, est indispensable à nos raisonnements. Mais leur *grandeur* est indifférente; car les valeurs maximums des rayons de convergence de ces séries dépendent en majeure partie de la configuration des aires S_x, S_y, ... et des positions qu'y occupent les valeurs initiales des variables (**202**, *inf.*)

Il résulte d'une remarque faite au n° **119** que $f(x, y, \ldots)$ *admet certainement* δ_x, δ_y, ... *pour olomètres, si cette fonction admet au même titre toute combinaison de quantités positives respectivement inférieures à celles-ci.*

140. D'après ces définitions, *la somme d'une série entière* $F(x, y, \ldots)$ *ayant* R_x, R_y, ... *pour rayons de convergence est évidemment une fonction olotrope en* $x = 0$, $y = 0$, ..., *avec ces rayons eux-mêmes pour olomètres;* car $F(0 + h, 0 + k, \ldots)$ se réduit à $F(h, k, \ldots)$, c'est-à-dire à ce que devient la série considérée quand on représente ses variables par les lettres h, k, ... substituées à x, y, ...

La même fonction est olotrope dans des aires S_x, S_y, ... *découpées arbitrairement dans celles de cercles concentriques aux cercles de convergence, mais de rayons moindres, avec des olomètres égaux à* δ_x, δ_y, ..., *plus courtes distances respectives des points des contours de ces aires à ceux des circonférences des cercles de convergence.* Car, si x, y, ... tombent à l'intérieur de S_x, S_y, ..., et si les modules de h, k, ... sont inférieurs à δ_x, δ_y, ..., on a certainement

$$\operatorname{mod} x + \operatorname{mod} h < R_x, \qquad \operatorname{mod} y + \operatorname{mod} k < R_y, \qquad \ldots$$

et (120) $F(x+h, y+k, \ldots)$ peut se mettre sous forme d'une série entière en $x, y, \ldots, h, k, \ldots$ que rien n'empêche d'ordonner par rapport à $h, k, \ldots$ seulement.

141. De même, *la somme* $F(x-x_0, y-y_0, \ldots)$ *d'une série qui est entière par rapport aux différences* $x-x_0, y-y_0, \ldots$ *et qui a* $R_x, R_y, \ldots$ *pour rayons de convergence, est fonction olotrope de* $x, y, \ldots$ *dans des portions quelconques des aires de cercles ayant pour centres* $x_0, y_0, \ldots$ *et pour rayons des quantités positives* $R'_x, R'_y, \ldots$ *inférieures à* $R_x, R_y, \ldots$, *par exemple dans tout l'intérieur des cercles dont il s'agit.*

142. La remarque suivante est quelquefois utile : *Si* $f(x, y, \ldots)$ *est olotrope dans les aires* $S_x, S_y, \ldots$ *avec* $\delta_x, \delta_y, \ldots$ *pour olomètres, et si, nommant* $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \ldots$ *des quantités positives inférieures à ces dernières, on accroît les aires, de zones additionnelles* $Z_x, Z_y, \ldots$, *ayant des épaisseurs moindres que* ε_x, $\varepsilon_y, \ldots$, *c'est-à-dire telles qu'à un point quelconque de* Z_x *par exemple corresponde toujours dans* S_x *quelque autre point qui en soit à une distance inférieure à* ε_x, *la fonction considérée est aussi définie dans les aires totales* $S'_x, S'_y, \ldots$ *résultant de l'adjonction des zones* $Z_x, Z_y, \ldots$ *aux aires considérées; de plus elle y est encore olotrope, mais avec des olomètres égaux seulement à*

$$\delta'_x = \delta_x - \varepsilon_x, \qquad \delta'_y = \delta_y - \varepsilon_y, \qquad \ldots.$$

Soit $x', y', \ldots$ un système de valeurs des variables prises n'importe où dans les aires totales, par exemple dans les zones additionnelles. Comme il existe, par hypothèse, des valeurs des variables $x_0, y_0, \ldots$ tombant dans les aires primitives et étant telles que les modules des différences $x'-x_0, y'-y_0, \ldots$ soient plus petits que $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \ldots$, ces modules seront, à plus forte raison, inférieurs à $\delta_x, \delta_y, \ldots$ et

$$f(x', y', \ldots) = f(x_0 + \overline{x'-x_0}, y_0 + \overline{y'-y_0}, \ldots)$$

est, par définition, la somme de quelque série convergente entière par rapport aux différences $x'-x_0, y'-y_0, \ldots$.

Soient enfin $h', k', \ldots$ des accroissements de modules infé-

rieurs à δ'_x, δ'_y, ..., attribués aux variables à partir des valeurs initiales x', y', ...

Comme la série entière ci-dessus a pour rayons de convergence δ_x, δ_y, ..., quantités égales à $\varepsilon_x + \delta'_x$, $\varepsilon_y + \delta'_y$, ..., supérieures, par suite, aux sommes

$$\operatorname{mod}(x' - x_0) + \operatorname{mod} h', \quad \operatorname{mod}(y' - y_0) + \operatorname{mod} k', \quad \ldots,$$

on peut remplacer ses propres variables $x' - x_0$, $y' - y_0$, ... par les sommes

$$\overline{x' - x_0} + h', \quad \overline{y' - y_0} + k', \quad \ldots,$$

la transformer en une série entière par rapport à toutes les quantités $x' - x_0$, $y' - y_0$, ..., h', k', ..., puis ordonner cette nouvelle série par rapport à h', k', ... (**120**).

Or ce développement est précisément celui dont il fallait constater la possibilité pour

$$f(x' + h', y' + k', \ldots) = f(x_0 + \overline{x' - x_0} + h', y_0 + \overline{y' - y_0} + k', \ldots).$$

143. D'une manière moins précise mais plus brève, on peut dire que *la diminution des olomètres d'une fonction permet d'augmenter d'épaisseurs égales à ces décroissements les aires où l'on sait qu'elle jouit de cette propriété*. Inversement, *la réduction des aires permet une augmentation correspondante de la grandeur des olomètres*, réciproque plus difficile à établir et qui nous conduira bientôt à la détermination exacte des rayons de convergence maximums du développement d'une fonction que l'on sait être olotrope dans des aires données (**201**, **204**, *inf.*).

144. Relativement à une fonction donnée, puisqu'elle est habituellement développable en série entière, on pourrait aussi appeler *ordinaires* les valeurs des variables à partir desquelles ce développement est possible. Par opposition, nous appellerons valeurs *singulières* celles à partir desquelles il ne l'est plus, ce qui est toujours un fait exceptionnel, comme nous l'avons annoncé, et nous dirons que la fonction se trouve dans une *phase singulière*, quand les variables prennent de semblables valeurs ou bien quand elles tendent vers elles.

Pour une même fonction de k variables, les valeurs singulières de celles-ci sont en général les systèmes de solutions numériques d'équations simultanées finies (**281**, *inf.*)

$$\begin{cases} \omega_1(x, y, \ldots) = 0, \\ \omega_2(x, y, \ldots) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

dont le nombre est égal ou inférieur à k et dépend, ainsi que la nature de ces équations, de celle de la fonction considérée. C'est ce qui résulte de l'ensemble des faits connus.

145. Nous devons encore mettre au nombre des phases singulières d'une fonction l'état où elle se trouve quand quelques-unes de ses variables deviennent infinies; car alors celles-ci ne restent plus voisines de valeurs particulières à partir desquelles le développement en série entière soit possible.

146. Quelquefois, pour certaines valeurs des variables, les opérations générales qui définissent une fonction ne permettent plus, *à elles seules,* de constater si la fonction est olotrope ou bien si elle se trouve dans une phase singulière, et, pour en décider, il faut faire entrer en ligne de compte quelque autre circonstance spéciale de la question. Nous dirons que ces valeurs sont *critiques*. La fonction entre alors dans une *phase critique* se résolvant après discussion, tantôt en une phase ordinaire, tantôt en une phase singulière.

Les expressions dites habituellement *se présenter sous l'une des formes* $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \times \infty$, $\infty - \infty$, ... ne sont pas autre chose que des fonctions entrant dans certaines phases critiques.

147. Pour des valeurs singulières ou critiques des variables, il arrive souvent que l'*exécution même* des calculs générateurs de la fonction devient impossible. Alors *pour définir sa valeur,* du choix de laquelle on redevient maître, *on prend toujours, par convention générale, la limite vers laquelle tend la fonction quand les variables tendent vers leurs valeurs singulières ou critiques,* à condition, bien entendu, que cette limite existe indé-

pendamment de toute hypothèse sur le mode de variation relative des variables.

Si cette limite n'existe pas, mais si le module de la fonction croît indéfiniment, on dit que pour ces valeurs la fonction est *infinie*. Dans tout autre cas, on la dit *indéterminée* (*Cf.* 154, *inf.*).

148. La discussion d'une fonction dont quelques variables sont infinies peut se ramener au cas où elles tendent vers des limites nulles, au moyen d'un artifice très simple et assez souvent employé.

Supposons par exemple qu'il y ait à étudier ce que devient $f(x, y, z, \ldots)$ quand x et y sont infinies et que $z, \ldots$ tendent vers les limites $c, \ldots$. Comme les quantités $x' = \frac{1}{x}, y' = \frac{1}{y}$ sont infiniment petites (82), inversement $x = \frac{1}{x'}, y = \frac{1}{y'}$ sont les inverses arithmétiques de variables qui tendent vers zéro. Si donc on désigne par $'f(x', y', z, \ldots)$ la fonction $f\left(\frac{1}{x'}, \frac{1}{y'}, z, \ldots\right)$ du nouveau système des variables $x', y', z, \ldots$, il est clair que la discussion de $f(x, y, z, \ldots)$ dans les circonstances spécifiées revient à celle de $'f(x', y', z, \ldots)$ pour $\lim x' = \lim y' = 0$, $\lim z = c, \ldots$.

149. Quand une fonction est olotrope en $x_0, y_0, \ldots$, on peut, par définition (139), la mettre, pour toutes valeurs des variables suffisamment voisines de celles-ci, sous la forme

$$\Sigma[a_{m,n,\ldots}(x - x_0)^m (y - y_0)^n \ldots]$$

d'une série entière par rapport aux différences variables $x - x_0$, $y - y_0, \ldots$, les coefficients $a_{m,n,\ldots}$ étant, bien entendu, des constantes. On pourrait appeler *cercles de convergence* d'une pareille série ceux qui ont $x_0, y_0, \ldots$ pour centres avec les olomètres correspondants de la fonction pour rayons. C'est de cette forme précise, combinée avec les propriétés fondamentales des séries entières (Chap. V), que nous déduirons successivement tous les théorèmes généraux de l'Analyse infinitésimale, et il nous semble impossible de le faire convenablement en suivant une autre marche; du moins, personne que nous sachions n'y a encore réussi. Le lecteur retiendra donc soigneusement que *ces théorèmes ne subsistent qu'entre les limites où les fonctions considérées*

sont toutes olotropes, ou, ce qui revient au même, *que pour les valeurs ordinaires des variables.*

En dehors de cela, le raisonnement manque de base et ne peut plus s'édifier. Pour les valeurs singulières des variables, *on retombe donc dans l'inconnu,* et l'étude d'une fonction ne peut se poursuivre autrement qu'en employant tel artifice que pourront suggérer ses propriétés spécifiques.

Mais, dans les monographies, les phases singulières jouent un rôle considérable, parce que c'est en elles que font saillie les propriétés caractéristiques des fonctions, comme l'organisation générale d'un être vivant se trahit par les anomalies de sa structure, par ses maladies spéciales.

150. La première chose à faire, quand on rencontre une nouvelle fonction, est donc d'assigner les valeurs des variables pour lesquelles elle est olotrope, de chercher en même temps ses phases singulières et de discuter celles-ci. C'est ce que nous allons faire pour le petit nombre de fonctions dont nous pouvons parler en ce moment.

Les polynômes entiers sont indéfiniment olotropes. Si effectivement $f(x, y, \ldots)$ désigne une fonction entière, on peut, quelles que soient les valeurs attribuées à x, y, ... et aux accroissements h, k, ..., transformer, au moyen des premières règles de l'Algèbre, l'expression $f(x+h, y+k, \ldots)$ en un polynôme entier en h, k, ..., qui constitue évidemment une série entière limitée. La grandeur des olomètres est indéfinie.

Les seuls systèmes de valeurs singulières des variables sont donc ici ceux où quelqu'une d'elles est supposée infinie. Quand il y a plusieurs variables infinies, la variation de la fonction dépend des circonstances; *dans le cas d'une seule, la fonction est toujours infinie* (à moins toutefois qu'elle ne dégénère en une constante).

En supposant, en effet, l'exposant $k \geqq 1$ avec a_k non $= 0$, on peut écrire

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_k x^k = (a_k + e) x^k,$$

où

$$e = \frac{a_{k-1}}{x} + \frac{a_{k-2}}{x^2} + \ldots + \frac{a_0}{x^k}$$

est évidemment une quantité infiniment petite, pour x infinie.

En appelant donc ε une quantité positive inférieure à α_k, module de a_k, en donnant à ξ, module de x, des valeurs assez grandes pour que mod e reste $< \varepsilon$, on aura

$$\text{mod} f(x) > (\alpha_k - \varepsilon)\xi^k,$$

expression dont les facteurs sont le premier invariable, le second infini avec ξ.

151. *Un monôme à exposants entiers négatifs*

$$f(x, y, \ldots) = \frac{1}{x^p y^q \ldots}$$

est olotrope dans tout système d'aires S_x, S_y, ... *ne comprenant pas à leur intérieur les valeurs* 0, 0, ... *des variables; et, pour olomètres, on peut prendre les distances respectives minimums* δ_x, δ_y, ... *des points de ces aires aux origines* O_x, O_y, ... *des axes auxquels ils sont rapportés.*

Soit x_0, y_0, ... un système de valeurs initiales prises arbitrairement dans les aires S_x, S_y, ..., par suite, toutes différentes de zéro; soient encore h, k, ... des accroissements de modules inférieurs à δ_x, δ_y, ... Ces modules seront, à plus forte raison, inférieurs à ceux de x_0, y_0, ...; par suite, ceux des quantités

$$-\frac{h}{x_0} = x', \qquad -\frac{k}{y_0} = y', \qquad \ldots$$

seront tous inférieurs à 1.

La progression géométrique à p raisons égales à x', à q raisons égales à y', ...

$$(1) \qquad \Sigma(a_{m,n,\ldots} x'^m y'^n \ldots) = \Sigma\left[(-1)^{m+n+\ldots} \frac{a_{m,n,\ldots}}{x_0^m y_0^n \ldots} h^m k^n \ldots\right]$$

est donc convergente (**113**) et a pour somme

$$\frac{1}{(1-x')^p(1-y')^q \ldots} = \frac{x_0^p y_0^q \ldots}{(x_0+h)^p (y_0+k)^q \ldots}.$$

Il en résulte qu'on obtiendra le développement de

$$f(x_0+h, y_0+k, \ldots)$$

en série entière par rapport à h, k, ..., en divisant tous les termes de la série (1) ci-dessus par la constante $x_0^p y_0^q \ldots$.

Pour cette fonction, les seuls systèmes de valeurs singulières des variables sont donc ceux où l'une d'elles au moins est nulle ou bien infinie. En supposant quelques variables, d'abord infiniment petites, puis infinies, les autres ayant des valeurs données différentes de zéro, on voit immédiatement que la fonction est infinie dans le premier cas, partant non olotrope, infiniment petite dans le second. Elle est indéterminée (147) quand, en même temps, certaines variables sont infinies, d'autres infiniment petites.

152. Le cas d'une seule variable x mérite une mention spéciale. En posant

$$\frac{1}{(1-x')^p} = \Sigma a_m x'^m \quad (\operatorname{mod} x' < 1),$$

on aperçoit sans peine que a_m est égal au nombre des termes d'un polynôme homogène de degré m à p variables, c'est-à-dire à

$$\begin{aligned}\frac{(m+1)(m+2)\ldots(m+p-1)}{1.2\ldots(p-1)} &= \frac{1.2\ldots m(m+1)(m+2)\ldots(m+p-1)}{1.2\ldots m.1.2\ldots(p-1)}\\ &= \frac{p(p+1)\ldots(p+m-1)}{1.2\ldots m},\end{aligned}$$

d'où, en supposant x_0 non $= 0$, $\operatorname{mod} h < \operatorname{mod} x_0$,

$$\begin{aligned}(x_0+h)^{-p} = x_0^{-p} + \frac{-p}{1} x_0^{-p-1} h + \ldots\\ + \frac{(-p)(-p-1)\ldots(-p-m+1)}{1.2\ldots m} x_0^{-p-m} h^m + \ldots,\end{aligned}$$

développement identique à celui que fournirait la règle du binôme de Newton, appliquée mécaniquement à un exposant négatif.

Cette fonction x^{-p} entre dans une phase singulière pour $x = 0$ et pour x infinie; elle est infinie dans le premier cas, infiniment petite dans le second.

153. En supposant $p = 1$, on obtient la fonction $\frac{1}{x}$ dont nous parlerons souvent, et à laquelle nous donnerons le nom de fonction *fractionnaire simple*. Elle est olotrope pour toute valeur de x,

zéro excepté, et son développement en série entière se réduit à

$$\frac{1}{x_0+h}=\frac{1}{x_0}-\frac{h}{x_0^2}+\frac{h^2}{x_0^3}-\ldots+(-1)^m\frac{h^m}{x_0^{m+1}}+\ldots,$$

où l'on doit toujours supposer x_0 non $=0$, mod $h <$ mod x_0.

154. Comme exemple de phase critique, nous citerons la fonction $\frac{x^p}{x^q}$ pour $x=0$, valeur qui rend impossible la division à faire pour calculer la valeur correspondante de la fonction (**146**).

Si $p \geqq q$, la fonction est égale au monôme à exposant entier non négatif x^{p-q} pour toute valeur de x non $=0$. Elle est donc olotrope en $x=0$ (**150**) et s'y annule si $p>q$, en convenant toujours (**147**) de lui attribuer alors pour valeur celle qui lui sert de limite quand x tend vers zéro.

Mais, si p est $<q$, la fonction est égale, pour x non $=0$, au monôme à exposant entier négatif x^{p-q} qui cesse d'être olotrope pour $x=0$. Elle ne l'est donc pas non plus; de plus elle y est infinie (**147**) (**151**).

Dérivées premières.

155. *Si $f(x, y, \ldots)$ est olotrope dans les aires S_x, S_y, ... avec les olomètres δ_x, δ_y, ..., les coefficients du développement de $f(x+h, y+k, \ldots)$ en série entière par rapport à h, k, ... sont tous aussi des fonctions de x, y, ... qui sont olotropes dans les mêmes aires et avec les mêmes olomètres.*

Ces coefficients étant essentiellement indépendants de h, k, ... (**112**) ont toujours les mêmes valeurs pour des valeurs données de $x, y, \ldots$, de quelque manière que le développement de $f(x+h, y+k, \ldots)$ ait été construit; car les sommes de deux développements de cette espèce doivent l'une et l'autre reproduire $f(x+h, y+k, \ldots)$, par suite être égales entre elles pour tout système de valeurs de h, k, ... ayant des modules inférieurs aux olomètres (**137**). Chacun d'eux est donc une fonction déterminée de $x, y, \ldots$.

Soit maintenant x_0, y_0, ... un système de valeurs initiales tombant dans S_x, S_y, ..., puis h', k', ... des accroissements de mo-

dules inférieurs à $\delta_x, \delta_y, \ldots$, puis enfin $f_{p,q,\ldots}(x, y, \ldots)$ le coefficient de $h^p k^q \ldots$ dans le développement de $f(x+h, y+k, \ldots)$; il nous reste à prouver que $f_{p,q,\ldots}(x_0+h', y_0+k', \ldots)$ peut être mis sous forme d'une série entière en $h', k', \ldots$. A cet effet, nous appellerons $h'', k'', \ldots$ des quantités de modules inférieurs aux excès de $\delta_x, \delta_y, \ldots$ sur les modules de $h', k', \ldots$, et nous observerons que la série entière en $h, k, \ldots$ qui constitue le développement de $f(x_0+h, y_0+k, \ldots)$, ayant précisément $\delta_x, \delta_y, \ldots$ pour rayons de convergence, les inégalités

$$\operatorname{mod} h' + \operatorname{mod} h'' < \delta_x, \quad \operatorname{mod} k' + \operatorname{mod} k'' < \delta_y, \quad \ldots$$

permettent de remplacer, dans cette série, $h, k, \ldots$ par $h'+h''$, $k'+k''$, ... et de transformer l'expression correspondante

$$f(x_0+h'+h'', y_0+k'+k'', \ldots),$$

en une série entière par rapport à $h', k', \ldots, h'', k'', \ldots$ (120). Cela posé, le coefficient de $h''^p k''^q \ldots$ dans cette nouvelle série ordonnée par rapport à $h'', k'', \ldots$ est précisément le développement cherché de $f_{p,q,\ldots}(x_0+h', y_0+k', \ldots)$.

156. Dans le développement de $f(x+h, y+k, \ldots)$, le terme indépendant de $h, k, \ldots$ est naturellement la valeur de cette expression pour $h = k = \ldots = 0$, c'est-à-dire $f(x, y, \ldots)$. Les coefficients des termes suivants sont d'autres fonctions qui vont maintenant nous occuper.

Ceux des premières puissances de $h, k, \ldots$ se nomment les *dérivées de $f(x, y, \ldots)$ prises par rapport à $x, y, \ldots$ respectivement,* et se représentent par

$$f'_x(x, y, \ldots), \quad f'_y(x, y, \ldots), \quad \ldots$$

ou bien encore par

$$D_x f(x, y, \ldots), \quad D_y f(x, y, \ldots), \quad \ldots,$$

notations où les indices peuvent être supprimés dans le cas d'une seule variable indépendante.

Le coefficient de h dans le développement $f(x+h, y+k, \ldots)$

étant indépendant des divers accroissements, en particulier de k, ..., est égal à celui de h dans

$$f(x+h, y, \ldots) = f(x+h, y+0, \ldots).$$

Pour obtenir $f'_x(x, y, \ldots)$, *on peut donc opérer comme si* x *était la seule variable de* $f(x, y, \ldots)$ *en considérant les autres comme réduites momentanément à des constantes,* ce qui ramène toujours le calcul des dérivées au cas d'une seule variable indépendante.

Cette sorte de disjonction possible des variables dans le calcul des diverses dérivées d'une même fonction leur fait souvent appliquer la dénomination de dérivées *partielles.*

157. Cherchons les dérivées des fonctions que nous savons actuellement être olotropes.

1° *Une constante (si on veut la considérer comme un cas extrême des fonctions) a des dérivées toutes identiquement nulles.* Car une série entière en h, k, ... ne peut conserver une valeur constante, sans que son premier terme ne soit précisément égal à cette constante et que les coefficients de tous les autres ne s'évanouissent (137).

2° *La fonction rationnelle* $a(x-x_0)^{\varpi}(y-y_0)^{\chi}\ldots$, *où les exposants* ϖ, χ, ... *sont des entiers positifs ou négatifs, a pour dérivée par rapport à* x

$$\varpi a(x-x_0)^{\varpi-1}(y-y_0)^{\chi}\ldots.$$

On obtient effectivement ce résultat en remplaçant x par $x+h$, c'est-à-dire $x-x_0$ par $x-x_0+h$, en développant

$$(\overline{x-x_0}+h)^{\varpi}$$

par la formule du binôme, soit ordinaire, soit généralisée comme au n° 152, et en prenant le coefficient de h dans le développement correspondant de notre fonction. Il faut naturellement supposer que les valeurs de x, y, ... n'annulent aucune différence pourvue d'un exposant négatif.

Pour la fonction fractionnaire simple $\frac{1}{x} = x^{-1}$ (153), on a la formule

$$D\frac{1}{x} = (-1)x^{-1-1} = -\frac{1}{x^2}.$$

3° *La dérivée par rapport à x d'une fonction olotrope mise sous forme d'une série entière en $x - x_0, y - y_0, \ldots$*

$$\Sigma[a_{m,n,\ldots}(x - x_0)^m(y - y_0)^n\ldots] \qquad (149)$$

est la somme de la série

$$\Sigma[ma_{m,n,\ldots}(x - x_0)^{m-1}(y - y_0)^n\ldots]$$

qui a pour termes les dérivées par rapport à x des divers termes de celle-ci, calculées conformément à la règle précédente (2°).

En ordonnant par rapport à h le résultat de la substitution de $\overline{x - x_0} + h$ à $x - x_0$ dans la série proposée (120), on trouve effectivement une série entière en h, où la première puissance de cet accroissement a pour coefficient la somme de la série formée par les coefficients de h dans les développements des expressions

$$a_{m,n,\ldots}(\overline{x - x_0} + h)^m(y - y_0)^n\ldots.$$

Quand on a $x_0 = y_0 = \ldots = 0$, on retombe sur une série entière proprement dite *dont les dérivées se calculent ainsi terme à terme, qu'elle soit illimitée, ou bien qu'elle dégénère en polynôme entier.*

Dérivées d'ordres supérieurs.

158. Comme les dérivées d'une fonction olotrope $f(x, y, \ldots)$ le sont elles-mêmes dans les mêmes aires et avec les mêmes olomètres, elles ont des dérivées jouissant des mêmes propriétés (155) (156); de même pour celles-ci et leurs propres dérivées, et ainsi de suite indéfiniment. Ces dérivées de dérivées sont les *dérivées partielles de tous ordres de la fonction primitive,* dont la nomenclature repose sur le théorème suivant :

Une dérivée d'ordre supérieur dépend uniquement des nombres exprimant combien de fois on a dérivé par rapport

à chaque variable, de quelque manière d'ailleurs que ces opérations partielles aient pu se succéder.

Ce point est évident pour le monôme

$$a(x-x_0)^{\varpi}(y-y_0)^{\chi}\ldots;$$

car, en appelant $p, q, \ldots$ les nombres de dérivations à exécuter par rapport à $x, y, \ldots$ respectivement, l'application répétée de la règle ci-dessus (157, 2°) donnera pour résultat

$$[\varpi(\varpi-1)\ldots(\varpi-p+1)][\chi\ldots(\chi-q+1)]\ldots a(x-x_0)^{\varpi-p}(y-y_0)^{\chi-q}\ldots,$$

de quelque manière que l'on ait procédé.

Il est donc général puisque, par définition, toute fonction olotrope est la somme d'une série procédant suivant des monômes de cette espèce (149), série que l'on dérive en dérivant successivement chacun de ses termes (157, 3°).

159. Pour spécifier une dérivée d'ordre supérieur, il suffit donc d'indiquer les nombres de dérivations partielles relatives à chaque variable, que sa formation comporte. En représentant ces nombres par $p, q, \ldots$, pour $x, y, \ldots$, on dit cette dérivée *d'ordres partiels $p, q, \ldots$ par rapport* à $x, y, \ldots$ respectivement, et aussi *d'ordre total $p+q+\ldots$ par rapport à l'ensemble des variables* considérées indistinctement. On la note soit par

$$f^{(p,q,\ldots)}_{x,y,\ldots}(x, y, \ldots),$$

soit par

$$D^{(p,q,\ldots)}_{x,y,\ldots}f(x, y, \ldots),$$

en supprimant quelquefois les indices, surtout dans le cas d'une seule variable.

Les dérivées proprement dites, dont il était question dans le paragraphe précédent, sont d'ordre total 1 et se nomment les dérivées *premières*. Les dérivées d'ordres totaux 2, 3, ... sont les dérivées *secondes, troisièmes, etc.* Quelquefois on a intérêt à considérer une fonction comme étant sa propre dérivée d'ordre zéro.

Le nombre des dérivées d'ordre total M est évidemment égal à celui des termes d'un polynôme homogène de degré M par rapport

à l'ensemble des variables. Dans le cas d'une seule variable, il se réduit donc à 1, quel que soit M.

160. Le calcul des dérivées d'ordre supérieur ne comporte aucune observation spéciale, puisqu'il se décompose toujours en un certain nombre de dérivations simples. On notera seulement que *pour une fonction olotrope dont on connaît le développement en série entière par rapport à* $x - x_0$, $y - y_0$, ..., *ce calcul s'opère en l'exécutant séparément sur chacun des termes du développement.*

161. Il est bon encore de retenir la forme de la dérivée $k^{ième}$ du monôme x^ϖ à exposant entier positif ou négatif. En répétant l'application de la règle indiquée tout à l'heure pour une seule dérivation (157, 2°), *on trouve de suite*

$$D^k x^\varpi = \varpi(\varpi - 1)\ldots(\varpi - k + 1)x^{\varpi - k}.$$

Quand ϖ est positif, le degré du monôme diminue d'une unité à chaque nouvelle dérivation; pour $k = \varpi$, la dérivée se réduit à la constante $1.2\ldots\varpi$; pour $k \geqq \varpi + 1$ la dérivée devient donc identiquement nulle (157, 1°). Mais toutes les dérivées de ce monôme sont comme lui des fonctions entières de x.

Quand ϖ est négatif, le degré du monôme diminue toujours *algébriquement* d'une unité à chaque dérivation, mais *numériquement* il augmente d'autant. Toutes les dérivées sont, comme le monôme proposé, des fonctions rationnelles *fractionnaires,* et jamais elles ne deviennent identiquement nulles, parce qu'aucun facteur nul ne peut s'introduire dans le coefficient. Ici, il faut naturellement supposer x non $= 0$.

D'après cela, *le degré effectif d'un polynôme entier à une ou plusieurs variables diminue d'une unité à chaque dérivation; ses dérivées se réduisent à des constantes quand leur ordre total atteint ce degré, et elles deviennent identiquement nulles à partir du moment où il le surpasse.* En particulier, *les dérivées de tous ordres d'une constante sont identiquement nulles.*

162. *La dérivée* $f^{(p,q,\ldots)}_{x,y,\ldots}(x, y, \ldots)$ *est égale au produit par le facteur numérique* $(1.2\ldots p)(1.2\ldots q)\ldots$, *du coefficient*

de $h^p k^q$, ... dans le développement de $f(x+h, y+k, \ldots)$ en série entière par rapport aux accroissements h, k, ...

Soit

$$f(x, y, \ldots) = \Sigma[a_{m,n,\ldots}(x-x_0)^m(y-y_0)^n, \ldots]$$

le développement de la fonction à partir de valeurs initiales des variables suffisamment rapprochées de celles que l'on considère. On a d'abord, d'après la remarque ci-dessus (**160**),

$$f^{(p,q,\ldots)}_{x,y,\ldots}(x, y, \ldots) = \Sigma[m(m-1)\ldots(m-p+1)n(n-1)\ldots(n-q+1)\ldots \times a_{m,n,\ldots}(x-x_0)^{m-p}(y-y_0)^{n-q}\ldots].$$

Si l'on cherche ensuite le coefficient de $h^p k^q \ldots$ dans le développement de

$$\Sigma[a_{m,n,\ldots}(\overline{x-x_0}+h)^m(\overline{y-y_0}+k)^n\ldots]$$

en série entière par rapport à $x-x_0$, $y-y_0$, ..., h, k, ..., ordonné par rapport à ces accroissements, on trouvera facilement, en appliquant ce qui a été dit au n° **123**,

$$\left(\frac{1}{1.2\ldots p}\,\frac{1}{1.2\ldots q}\cdots\right)\Sigma[m(m-1)\ldots(m-p+1)n(n-1)\ldots(n-q+1)\ldots \times a_{m,n,\ldots}(x-x_0)^{m-p}(y-y_0)^{n-q}\ldots],$$

ce qui justifie l'exactitude de notre énoncé.

163. En vertu de cette relation générale qui a lieu d'elle-même pour le premier ordre, *les dérivées de tous ordres de $f(x, y, \ldots)$ ne diffèrent des coefficients des divers termes du développement de $f(x+h, y+k, \ldots)$ que par des facteurs numériques très simples*. On pourrait donc aussi bien les définir par ces coefficients eux-mêmes, comme nous l'avons fait dans le premier ordre. Il y aurait ainsi plus d'uniformité; mais la décomposition mentale d'une dérivation quelconque en un certain nombre de dérivations premières procure une division avantageuse de certaines difficultés.

164. Si, conformément à ce qui vient d'être dit, on introduit les valeurs initiales des dérivées de $f(x, y, \ldots)$ dans le développement de $f(x_0+h, y_0+k, \ldots)$, dans celui de $f(x, y, \ldots)$ en

série entière par rapport aux différences $(x - x_0)$, $(y - y_0)$, ..., ils prennent les formes

$$\Sigma f^{(m,n,\ldots)}_{x,y,\ldots}(x_0, y_0, \ldots) \frac{h^m}{1.2\ldots m} \frac{k^n}{1.2\ldots n}\ldots,$$

$$\Sigma f^{(m,n,\ldots)}_{x,y,\ldots}(x_0, y_0, \ldots) \frac{(x-x_0)^m}{1.2\ldots m} \frac{(y-y_0)^n}{1.2\ldots n}\ldots,$$

dont la dernière devient

$$\Sigma f^{(m,n,\ldots)}_{x,y,\ldots}(0, 0, \ldots) \frac{x^m}{1.2\ldots m} \frac{y^n}{1.2\ldots n}\ldots,$$

quand on développe à partir des valeurs 0, 0, ... de toutes les variables (supposées, bien entendu, ordinaires).

Ces séries sont celles de Taylor et de Maclaurin, mais nous y attachons un sens bien différent. Habituellement, on définit les dérivées comme limites de rapports d'accroissements infiniment petits (**196**, *inf.*), puis on rattache la *possibilité* même du développement d'une fonction par la série de Taylor à l'existence d'un ensemble varié d'autres propriétés générales réputées plus simples. Abandonnant radicalement cette manière de voir, qui nous paraît ne conduire à rien de satisfaisant, nous supposons *préalablement établie, au contraire, la possibilité de développer* $f(x+h, y+k, \ldots)$ *en une série entière par rapport à* $h, k, \ldots$, et nous en tirons la définition des dérivées. En les réintroduisant ensuite dans le développement, nous ne faisons donc qu'exprimer les mêmes faits dans un autre langage.

165. Nos définitions ne donnent un sens au mot *dérivées,* que pour les fonctions olotropes et entre les limites où elles jouissent de cette propriété fondamentale. *Les fonctions qui n'en sont pas douées n'ont pas de dérivées pour nous.* Pour des valeurs singulières des variables, les valeurs des dérivées sont assignées conventionnellement comme nous l'avons expliqué au n° **147**. Par exemple, on dit que la fonction fractionnaire simple $\frac{1}{x}$ a une dérivée infinie pour $x = 0$, parce que sa dérivée $-\frac{1}{x^2}$, prise pour des valeurs infiniment petites de x, est infinie.

Comme nous venons de le voir implicitement (155) (162), *les dérivées d'une fonction restent toutes olotropes aussi longtemps qu'elle;* plus tard (213, *inf.*), nous constaterons que, *dans chaque ordre, l'une d'elles au moins cesse de l'être, dès que la fonction entre dans une phase singulière.*

166. Le théorème du n° 162 rend évidente cette observation générale qui se rattache à la théorie des fonctions composées (Chap. IX, *inf.*) : *Si les fonctions f_1, f_2, ..., f_g sont toutes olotropes, et si a_1, a_2, ..., a_g désignent des constantes quelconques, l'expression linéaire et homogène*

$$a_1 f_1 + a_2 f_2 + \ldots + a_g f_g$$

est aussi une fonction olotrope; et, pour en former une dérivée d'ordres donnés quelconques, il suffit d'y substituer à f_1, f_2, ..., f_g leurs dérivées des mêmes ordres dont il s'agit.

Différentielles.

167. La notation habituelle des dérivées a été déduite de considérations, maintenant abandonnées à peu près, mais dont à cause de cela il faut que nous disions un mot.

La fonction $f(x, y, \ldots)$ étant supposée olotrope, le développement de $f(x+h, y+k, \ldots)$ contient des termes du premier degré en h, k, ..., dont l'ensemble

$$f'_x h + f'_y k + \ldots$$

se nomme la *différentielle totale première* de cette fonction et se représente par le signe df. Cette différentielle est donc une nouvelle fonction tant de $x, y, \ldots$ que de $h, k, \ldots$, mais essentiellement linéaire et homogène par rapport à ces accroissements. Comme les dérivées $f'_x, f'_y, \ldots$ qui y figurent, elle est olotrope par rapport à $x, y, \ldots$ dans les aires où $f(x, y, \ldots)$ est implicitement supposée l'être (165) (166).

On se dispense d'affecter des notations spéciales aux accroissements en les représentant généralement par dx, dy, ..., et l'on a ainsi par définition

$$df = f'_x dx + f'_y dy + \ldots.$$

La différentielle totale *seconde* de $f(x, y, \ldots)$, $d^2 f$, est la différentielle première de sa différentielle première, prise par rapport à $x, y, \ldots$ seulement et en attribuant à ces variables les mêmes accroissements $dx, dy, \ldots$ qui ont déjà servi à former celle-ci. Il vient donc facilement

$$d^2 f = f^{(2,0,\ldots)}_{x,y,\ldots}\, dx^2 + 2 f^{(1,1,\ldots)}_{x,y,\ldots}(x, y, \ldots)\, dx\, dy + f^{(0,2,\ldots)}_{x,y,\ldots}(x, y, \ldots)\, dy^2 + \ldots$$

Plus généralement, *la différentielle totale d'ordre* M, $d^M f$, *est la différentielle première de* $d^{M-1} f$, *prise par rapport aux variables primitives* $x, y, \ldots$ *toujours accrues des mêmes quantités* $dx, dy, \ldots$. Son développement est donné par la formule

$$(1) \quad d^M f = \sum_{p,q,\ldots} \left[\frac{1.2\ldots M}{1.2\ldots p.1.2\ldots q.1\ldots} f^{(p,q,\ldots)}_{x,y,\ldots}(x, y, \ldots)\, dx^p\, dy^q \ldots \right],$$

la sommation s'étendant à tous les systèmes distincts de solutions en entiers positifs, de l'équation indéterminée

$$p + q + \ldots = M.$$

On le prouve en raisonnant exactement comme nous l'avons fait aux nos **121**, **122**, pour le développement de la puissance $M^{\text{ième}}$ d'un polynôme.

On remarquera que cette différentielle est, par rapport à dx, $dy, \ldots$, un polynôme entier et homogène de degré M.

168. En donnant au développement de $f(x + dx, y + dy, \ldots)$ la forme de Taylor (**164**), en groupant ensuite les termes de degré total M par rapport à $dx, dy, \ldots$, on aperçoit immédiatement, d'après ce qui précède, que $d^M f$ *est précisément le produit de la somme des termes de ce groupe par le facteur numérique* $1.2\ldots M$.

169. Dans le cas d'une seule variable x, la formule (1) donne successivement

$$df = f'(x)\, dx, \quad d^2 f = f''(x)\, dx^2, \quad \ldots, \quad d^M f = f^{(M)}(x)\, dx^M, \quad \ldots,$$

ce qui autorise à représenter les diverses dérivées de $f(x)$ par les notations

$$\frac{df}{dx}, \quad \frac{d^2f}{dx^2}, \quad \ldots, \quad \frac{d^Mf}{dx^M}, \quad \ldots.$$

170. On obtient une notation analogue pour les dérivées partielles de tous ordres d'une fonction de plusieurs variables, par la considération des différentielles *partielles*, autres expressions sans plus d'utilité propre.

Si l'on prend p fois la différentielle totale de $f(x, y, \ldots)$ par rapport à x *considérée un instant comme seule variable* de cette fonction, puis q fois la différentielle totale du résultat, par rapport à y *considérée à son tour comme seule variable,* et ainsi de suite pour toutes les variables, on obtient une fonction de x, y, ..., dx, dy, ... qu'on nomme la *différentielle partielle* de $f(x, y, \ldots)$, *d'ordres* p, q, ... *par rapport à* x, y, ... *respectivement,* et que l'on peut représenter par $d^{(p,q,\ldots)}_{x,y,\ldots}f(x, y, \ldots)$.

Ce que nous venons de voir pour le cas d'une seule variable (**169**) conduit immédiatement à la formule

$$d^{(p,q,\ldots)}_{x,y,\ldots}f = f^{(p,q,\ldots)}_{x,y,\ldots}(x, y, \ldots)\, dx^p\, dy^q \ldots,$$

expression qui est évidemment indépendante de l'ordre dans lequel les différentiations premières par rapport à x, y, ... ont pu se succéder.

De là, on tire

$$f^{(p,q,\ldots)}_{x,y,\ldots}(x, y, \ldots) = \frac{d^{(p,q,\ldots)}_{x,y,\ldots}f}{dx^p\, dy^q \ldots} = \frac{d^M f}{dx^p\, dy^q \ldots},$$

où $M = p + q + \ldots$, en supprimant les indices et totalisant les accents, ce qui ne peut faire naître aucune ambiguïté, puisque la décomposition de l'ordre total M est indiquée au dénominateur.

C'est la notation des dérivées qui est la plus employée, malgré son grave inconvénient de ne pas permettre facilement la désignation des valeurs que l'on entend attribuer aux variables. Par exemple, les dérivées premières d'une fonction de deux variables se notent par

$$\frac{df}{dx}, \quad \frac{df}{dy},$$

les dérivées secondes par

$$\frac{d^2 f}{dx^2}, \quad \frac{d^2 f}{dx\, dy}, \quad \frac{d^2 f}{dy^2},$$

plus généralement celles d'ordre total M par

$$\frac{d^M f}{dx^M}, \quad \frac{d^M f}{dx^{M-1} dy}, \quad \dots, \quad \frac{d^M f}{dy^M}.$$

Dans ces notations, $d^M f$ désigne une différentielle partielle, tandis qu'au n° 167 ceci représentait une différentielle totale. L'emploi d'un même signe pour représenter deux choses entièrement différentes peut faire naître une confusion qu'il faudrait éviter.

On appelle encore *différentiation* l'opération consistant à former les dérivées des fonctions.

Les géomètres ont été conduits à la considération des différentielles par celle des *différences* successives des valeurs que prend une même fonction, pour des systèmes de valeurs des variables formant des termes de rangs égaux dans diverses progressions arithmétiques. Mais il serait hors de propos d'insister sur un point aussi dénué d'intérêt. Nous en dirons un mot au n° 198 (*inf.*).

Génération des fonctions olotropes par développements successifs.

171. Les fonctions rationnelles sont définies par des opérations déterminées, à exécuter *directement* sur les valeurs correspondantes de leurs variables; quelques autres fonctions se trouvent dans un cas semblable, sauf une complication plus grande dans les opérations génératrices, celles, par exemple, dont les valeurs s'obtiennent par la sommation de séries convergentes, soit entières, soit ayant pour termes des fonctions plus simples données directement dans des aires plus ou moins étendues. Mais la plupart se forment par un mécanisme entièrement différent, dont nous avons maintenant à donner une explication générale.

Quand on sait qu'une fonction donnée $f(x, y, \dots)$ est olotrope dans les aires S_x, S_y, ... avec certains olomètres δ_x,

δ_y, ..., *la simple connaissance des valeurs*

$$(1)\ f_0;\ \left(\frac{df}{dx}\right)_0,\ \left(\frac{df}{dy}\right)_0,\ \ldots;\ \ldots\ldots;\ \ldots,\ \left(\frac{d^{m+n+\ldots}f}{dx^m\,dy^n\ldots}\right)_0,\ \ldots;\ \ldots$$

que prennent elle et toutes ses dérivées en un seul système x_0, y_0, ... *de valeurs particulières des variables choisies arbitrairement dans ces aires, suffit pour qu'on puisse calculer par une voie indirecte sa valeur et celles de toutes ses dérivées en tout autre système* X, Y, ... *de valeurs particulières des variables tombant, bien entendu, dans les mêmes aires.*

On choisira effectivement, toujours dans les aires en question, d'autres systèmes de valeurs particulières des variables tels que, dans la suite formée par eux et par les proposés

$$(2)\quad (x_0, y_0, \ldots),\ (x_1, y_1, \ldots),\ (x_2, y_2, \ldots),\ \ldots,\ (x_g, y_g, \ldots),\ (\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \ldots).$$

la différence des valeurs consécutives d'une même variable ait toujours un module inférieur à l'olomètre correspondant, ce qu'il est évidemment possible de faire, à condition de prendre les systèmes intermédiaires suffisamment nombreux.

En sommant ensuite les produits des monômes

$$(3)\quad 1;\ \frac{x-x_0}{1},\ \frac{y-y_0}{1},\ \ldots;\ \ldots;\ \ldots,\ \frac{(x-x_0)^m}{1.2\ldots m}\,\frac{(y-y_0)^n}{1.2\ldots n},\ \ldots,\ \ldots;\ \ldots$$

multipliés respectivement par les termes semblablement placés dans la suite (1), on forme (164) le développement de $f(x, y, \ldots)$ à partir de $x_0, y_0, \ldots$, développement qui converge pour toutes les valeurs des variables dont les excès sur ces valeurs initiales sont inférieurs aux olomètres, en particulier pour $x = x_1, y = y_1, \ldots$. Si donc on réalise cette hypothèse dans ce développement et dans toutes ses dérivées, on retrouvera les valeurs en x_1, y_1, ... de $f(x, y, \ldots)$ et de toutes ses dérivées.

On pourra donc prendre $x_1, y_1, \ldots$ pour nouvelles valeurs initiales, puisque les valeurs de $f(x, y, \ldots)$ et de toutes ses dérivées y sont maintenant connues, y recommencer ce qu'on a fait en x_0, y_0, ... et passer ainsi à $x_2, y_2, \ldots$; de là on passera à $x_3, y_3, \ldots$, puis à ..., et ainsi de suite évidemment jusqu'à X, Y, ... En chacun des systèmes (2), sauf le premier où elles ont été calculées

directement, les valeurs de la fonction et de ses dérivées se déduiront du développement précédent, et un nouveau développement les fournira pour le système suivant.

Nous donnerons le nom de *cheminement* à cette opération échelonnée; effectivement, dans l'aire d'où il ne doit pas sortir, le point représentant graphiquement chaque variable *marche* de sa position initiale à sa position *finale* en occupant successivement plusieurs positions intermédiaires. Par exemple, le point correspondant à x saute de x_0 à x_1, puis de x_1 à x_2, ..., puis finalement de x_g à X. En outre, nous appellerons les diverses lignes brisées $[x_0 x_1 x_2 \ldots X]$, $[y_0 y_1 y_2 \ldots Y]$, ... les *chemins parcourus* par les variables x, y, ... dans le cours de cette opération.

Il est clair que ce cheminement peut être effectué d'une infinité de manières, puisque les seules conditions imposées au tracé des chemins se réduisent, pour leur ensemble à offrir des sommets en un même nombre d'ailleurs arbitraire, pour chacun d'eux à être tracé entre deux points donnés sans sortir d'une aire donnée et avec des côtés de longueurs inférieures à une quantité donnée.

Mais, *quels que soient les chemins suivis, le résultat final ne pourra manquer d'être toujours le même, puisqu'on retrouvera forcément les valeurs en* X, Y, ... *de la même fonction* $f(x, y, \ldots)$ *et de toutes ses dérivées.*

Pour la fonction x^{-p} par exemple (151) (152), on pourra cheminer de x_0 à X dans une aire quelconque ne contenant pas l'origine, et cela d'une manière arbitraire, pourvu que *la longueur de chaque pas,* c'est-à-dire de chaque côté du chemin, soit inférieure à la plus courte distance des points de l'aire à l'origine. Les quantités (1) servant de base au calcul seront simplement ici

$$(4)\quad x_0^{-p};\ -px_0^{-p-1};\ \ldots;\ (-p)(-p-1)\ldots(-p-m+1)x_0^{-p-m};\ \ldots$$

et, au bout de tous les chemins imaginables, on trouvera toujours pour cette fonction et pour ses dérivées les mêmes valeurs

$$X^{-p};\quad -pX^{-p-1};\quad \ldots;\quad (-p)(-p-1)\ldots(-p-m+1)X^{-p-m};\quad \ldots$$

172. Ces divers points bien entendus, rien n'empêche évidemment de cheminer ainsi à volonté dans les aires S_x, S_y, ..., à

partir de x_0, y_0, ..., en édifiant les calculs, non plus sur des quantités que l'on saurait être, comme celles de la suite (4), les valeurs en $x_0, y_0, \ldots$ d'une certaine fonction de $x, y, \ldots$ olotrope dans ces aires et de ses dérivées, mais cette fois, *sur toute autre suite de constantes*

$$(5) \quad c_0^{(0,0,\ldots)};\ c_0^{(1,0,\ldots)},\ c_0^{(0,1,\ldots)},\ \ldots;\ \ldots\ldots\ldots;\ \ldots,\ c_0^{(m,n,\ldots)},\ \ldots;\ \ldots$$

que l'on prendrait pour coefficients des monômes (3) dans un développement ayant extérieurement la forme de celui de Taylor (164), *quand bien même on ne saurait pas qu'elles fussent les valeurs en $x_0, y_0, \ldots$ de quelque fonction olotrope et de ses dérivées.* Mais alors aussi on ignore naturellement si, arrivé de cette manière en x, y, ..., on tombe bien sur la valeur correspondante d'une fonction qui serait olotrope dans les aires considérées. Pour qu'il en soit ainsi, deux conditions sont nécessaires.

Il faut d'abord que tous les développements successifs admettent des rayons de convergence conservant, pendant tout le cheminement, des valeurs assez grandes pour qu'il soit possible d'atteindre un système quelconque de valeurs des variables situées dans ces aires, par des pas en *nombre limité;* il faut, par suite, que ces rayons restent au moins égaux respectivement à certaines quantités positives invariables $\delta_x, \delta_y, \ldots$, quels que soient les chemins antérieurement parcourus dans ces aires. Quand cette condition sera remplie, nous appellerons la somme variable du développement considéré dont les coefficients sont variables aussi, une *pseudo-fonction* de x, y, ..., *oloïde* dans les aires S_x, S_y, ... avec δ_x, δ_y, ... pour olomètres. A la valeur acquise par cette pseudo-fonction en x, y, ..., au bout des chemins donnés, nous annexerons par la pensée les valeurs correspondantes de toutes les dérivées du développement particulier qui l'aura fournie, et nous nommerons toutes ces quantités les *articles,* leur ensemble le *schéma* de la pseudo-fonction, au bout des chemins considérés. Par exemple, l'ensemble illimité des constantes (5) constitue son schéma en x_0, y_0, ..., schéma que nous dirons *fondamental,* lui et aussi ces premières valeurs particulières des variables.

Il faut enfin qu'en X, Y, ..., les articles du schéma atteignent toujours les mêmes valeurs respectivement, de quelque manière

que ces quantités aient été choisies dans les aires données, de quelque manière aussi qu'on ait tracé dans celles-ci les chemins à parcourir pour y arriver en partant des valeurs fondamentales x_0, y_0, ... Quand cette deuxième condition sera remplie, ce qui est loin d'être fréquent, nous dirons que la pseudo-fonction est *monodrome* dans les aires considérées.

Ces deux conditions sont évidemment suffisantes; car, si elles sont satisfaites, les propriétés de la pseudo-fonction, sinon son origine, ne diffèrent en rien de celles que nous avons prises pour base de la définition d'une fonction de $x, y, \ldots$ olotrope dans les aires S_x, S_y, ... avec δ_x, δ_y, ... pour olomètres (139).

La réalisation de la première, qui est la plus essentielle, est subordonnée avant tout aux valeurs des articles fondamentaux (5), car celles-ci pourraient faire diverger même le premier développement (119); elle l'est ensuite à l'étendue et à la configuration des aires S_x, S_y, ... relativement à ces valeurs. Quand la première condition est remplie, la seconde ne dépend plus que de ces dernières circonstances; il est clair, en effet, que si ces aires se réduisaient à des cercles de centres x_0, y_0, ... et de rayons inférieurs à δ_x, δ_y, ..., le premier développement définirait dans leur intérieur, et par lui seul (141), une fonction olotrope de $x, y, \ldots$. Le théorème suivant, qu'on applique à tout instant dans la théorie des fonctions, fait connaître un cas très général et des plus remarquables, dans lequel la réalisation de la première condition entraîne celle de la seconde, et fait de la pseudo-fonction oloïde, une véritable fonction olotrope dans les mêmes aires et avec les mêmes olomètres.

173. *Si les aires* S_x, S_y, ... *ont des formes telles, qu'on ne puisse y tracer deux groupes de chemins conduisant des valeurs fondamentales* x_0, y_0, ... *à un même autre système quelconque de valeurs des variables* X, Y, ..., *sans qu'il soit possible d'amener les chemins de l'un de ces groupes à coïncider géométriquement avec ceux de l'autre, par des déformations progressives exécutées uniquement à l'intérieur de ces aires, la pseudo-fonction définie par le schéma fondamental* (5) *y est nécessairement monodrome quand elle y est oloïde.*

Les aires n'auraient pas la forme prescrite par l'énoncé, si l'une d'elles était perforée (89), si S_x par exemple était une couronne limitée par deux circonférences concentriques ; car on pourrait y marcher de x_0 à X par deux chemins, sur l'un desquels on laisserait à sa gauche le plus petit des deux cercles, tandis que sur l'autre on l'aurait à sa droite. Et alors on ne pourrait pas amener l'un de ces chemins à coïncider avec l'autre, sans en faire pénétrer quelques points à l'intérieur du petit cercle, c'est-à-dire sans le faire sortir partiellement de la couronne S_x. Pour qu'elles aient la forme voulue, il faut évidemment et il suffit que toutes soient *imperforées,* c'est-à-dire qu'aucune d'elles n'offre de solutions de continuité intérieures analogues à celles que l'on pourrait pratiquer dans une feuille de papier de forme quelconque en y frappant des coups d'emporte-pièce qui n'entameraient pas son bord et n'empiéteraient pas les uns sur les autres. On exprime quelquefois cette configuration topographique en disant que chaque aire est limitée par un contour *simple,* comme serait un trait tracé par un crayon dont la pointe ne quitterait pas le papier.

D'après cela, notre théorème peut s'énoncer de cette manière un peu plus brève : *Toute pseudo-fonction qui est oloïde dans des aires imperforées y est aussi monodrome et s'y confond, par suite* (172), *avec une véritable fonction olotrope aux mêmes olomètres.*

Comme la démonstration est la même dans tous les cas, nous nous bornerons à celui d'une seule variable x, ce qui simplifiera beaucoup l'écriture.

Nous appellerons S l'aire imperforée d'où x ne doit pas sortir, x_0 la valeur fondamentale de cette variable, Ψ la pseudo-fonction définie par le schéma fondamental donné

$$c_0^{(0)},\quad c_0^{(1)},\quad c_0^{(2)},\quad \dots,\quad c_0^{(m)},\quad \dots \tag{6}$$

et supposée oloïde dans l'aire S avec δ pour olomètre.

Nous désignerons par $\Psi[x_0]$ ce schéma fondamental et par $\Psi[x_0 x_1 \dots x_i x]$ le schéma de Ψ en x, après le parcours du chemin quelconque $[x_0 x_1 \dots x_i x]$ dont, bien entendu, les longueurs des côtés

$$\operatorname{mod}(x_1 - x_0),\quad \operatorname{mod}(x_2 - x_1),\quad \dots,\quad \operatorname{mod}(x - x_i)$$

sont toutes inférieures à δ.

Pour exprimer l'égalité respective des articles composant deux schémas donnés, ceux par exemple que la pseudo-fonction atteint en une même valeur de x, mais après le parcours de deux chemins différents, nous séparerons par le signe $=$, les notations des deux schémas écrites l'une à la suite de l'autre.

I. *Si l'on a*

$$\text{mod}(x_{i+1} - x_i) + \text{mod}(x_{i+2} - x_{i+1}) < \delta,$$

cas auquel ces deux modules et celui de la différence

$$x_{i+2} - x_i = (x_{i+1} - x_i) + (x_{i+2} - x_{i+1})$$

sont tous trois aussi $< \delta$, *et où, par conséquent, il est possible de parcourir les chemins*

$$[x_0 x_1 \ldots x_i x_{i+2}] \quad \text{et} \quad [x_0 x_1 \ldots x_i x_{i+1} x_{i+2}],$$

on aura

$$\Psi[x_0 x_1 \ldots x_i x_{i+2}] = \Psi[x_0 x_1 \ldots x_i x_{i+1} x_{i+2}]. \tag{7}$$

Soit $\psi_i(x - x_i)$ la série entière en $x - x_i$ construite au moyen du schéma $\Psi[x_0 x_1 \ldots x_i]$, série qui, par elle-même et par ses dérivées, fournit le schéma atteint par notre pseudo-fonction au bout du chemin $[x_0 x_1 \ldots x_i x]$, si l'on a $\text{mod}(x - x_i) < \delta$, à plus forte raison si l'on a

$$\text{mod}(x_{i+1} - x_i) + \text{mod}(x - x_{i+1}) < \delta,$$

ce que nous supposerons ci-après.

Pour $x = x_{i+2}$, valeur satisfaisant par hypothèse à la dernière inégalité, ce développement donne ainsi le schéma écrit dans le premier membre de l'égalité (7). Mais, à cause de la même inégalité, on peut (120) transformer

$$\psi_i(x - x_i) = \psi_i(\overline{x_{i+1} - x_i} + \overline{x - x_{i+1}})$$

en une autre série entière aussi par rapport aux deux différences $x_{i+1} - x_i$, $x - x_{i+1}$, et, par suite, trouver encore une fois le même schéma en ordonnant cette série par rapport à $x - x_{i+1}$, puis posant $x = x_{i+2}$ dans la série entière en $x - x_{i+1}$ ainsi obtenue, $\psi_{i+1}(x - x_{i+1})$, et dans toutes ses dérivées.

Or, dans le développement $\psi_{i+1}(x - x_{i+1})$, l'ensemble des multiplicateurs de

$$1, \quad \frac{x - x_{i+1}}{1}, \quad \ldots, \quad \frac{(x - x_{i+1})^m}{1.2\ldots m}, \quad \ldots$$

est visiblement

$$\psi_i(x_{i+1} - x_i), \quad \psi'_i(x_{i+1} - x_i), \quad \ldots, \quad \psi_i^{(m)}(x_{i+1} - x_i), \quad \ldots,$$

c'est-à-dire le schéma $\Psi[x_0 x_1 \ldots x_i x_{i+1}]$. Il en résulte que $\psi_{i+1}(x - x_{i+1})$ est précisément le développement de notre pseudo-fonction construit à partir de x_{i+1} au moyen de ce dernier schéma, et qu'en y faisant $x = x_{i+2}$ ce développement fournira, par lui-même et par ses dérivées, le schéma figurant dans le second membre de l'égalité (7).

Ainsi donc la série $\psi_i(x - x_i)$ et toutes ses dérivées par rapport à x d'une part, la série $\psi_{i+1}(x - x_{i+1})$ et toutes ses dérivées dont nous savons les sommes respectivement égales à celles des premières d'autre part, fournissent en $x = x_{i+2}$, savoir, les premières le schéma figurant dans le premier membre de l'égalité (7), les dernières celui figurant dans son second membre. Ces deux schémas sont donc bien identiques.

II. *Plus généralement, si les valeurs particulières de* x : x_{i+1}, x_{i+2}, ..., x_{i+j}, *en nombre quelconque* j, *donnent*

$$(8) \quad \operatorname{mod}(x_{i+1} - x_i) + \operatorname{mod}(x_{i+2} - x_{i+1}) + \ldots + \operatorname{mod}(x_{i+j} - x_{i+j-1}) < \delta,$$

cas auquel chacun de ces modules, celui aussi de la différence

$$x_{i+j} - x_i = (x_{i+1} - x_i) + (x_{i+2} - x_{i+1}) + \ldots + (x_{i+j} - x_{i+j-1}),$$

sont tous $< \delta$ *et où les chemins*

$$[x_0 x_1 \ldots x_i x_{i+j}], \quad [x_0 x_1 \ldots x_i x_{i+1} \ldots x_{i+j-1} x_{i+j}]$$

sont tous deux praticables, on a encore

$$\Psi[x_0 x_1 \ldots x_i x_{i+j}] = \Psi[x_0 x_1 \ldots x_i x_{i+1} \ldots x_{i+j-1} x_{i+j}].$$

En supposant $q < j$, le point en question supposé établi jusqu'à $x = x_{i+q}$ s'étend sans peine à $x = x_{i+q+1}$. Effectivement,

de l'hypothèse admise

$$\Psi[x_0 x_1 \ldots x_i x_{i+q}] = \Psi[x_0 x_1 \ldots x_i x_{i+1} \ldots x_{i+q-1} x_{i+q}],$$

on conclut immédiatement, par le développement de la pseudo-fonction fait en x_{i+q} avec l'un et l'autre de ces schémas identiques,

$$\Psi[x_0 x_1 \ldots x_i x_{i+q} x_{i+q+1}] = \Psi[x_0 x_1 \ldots x_i x_{i+1} \ldots x_{i+q-1} x_{i+q} x_{i+q+1}].$$

Or on a

$$\mathrm{mod}(x_{i+q} - x_i) + \mathrm{mod}(x_{i+q+1} - x_{i+q}) < \delta$$

à cause de l'inégalité (8) et de

$$x_{i+q} - x_i = (x_{i+1} - x_i) + (x_{i+2} - x_{i+1}) + \ldots + (x_{i+q} - x_{i+q-1});$$

on a donc, d'après ce qui a été démontré ci-dessus (I),

$$\Psi[x_0 x_1 \ldots x_i x_{i+q+1}] = \Psi[x_0 x_1 \ldots x_i x_{i+q} x_{i+q+1}],$$

égalité dont la combinaison avec la précédente conduit à l'extension annoncée.

Le point dont nous nous occupons ayant été démontré pour $x = x_{i+2}$ l'est donc aussi pour

$$x = x_{i+3}, \quad x_{i+4}, \quad \ldots, \quad x_{i+j-1}, \quad x_{i+j}.$$

III. *La subdivision d'un côté du chemin* $[x_0 x_1 \ldots x_i]$ *en fragments aussi petits et aussi nombreux qu'on le veut, ne modifie pas le schéma final atteint en* x_i *par la pseudo-fonction.*

Soient, par exemple, x', x'', ... $x^{(\nu)}$ des points de subdivision marqués arbitrairement sur le premier côté en y marchant de x_0 à x_1. Comme le module d'une différence est égal à la distance mutuelle des points qui représentent graphiquement ses deux termes (85), on a évidemment

$$\mathrm{mod}(x' - x_0) + \mathrm{mod}(x'' - x') + \ldots + \mathrm{mod}(x_1 - x^{(\nu)}) = \mathrm{mod}(x_1 - x_0) < \delta;$$

on a donc aussi (II)

$$\Psi[x_0 x_1] = \Psi[x_0 x' x'' \ldots x^{(\nu)} x_1],$$

d'où

$$\Psi[x_0 x_1 x_2 \ldots x_i] = \Psi[x_0 x' x'' \ldots x^{(\nu)} x_1 x_2 \ldots x_i].$$

Et de même pour tout autre côté.

On voit ainsi que, *sans changer le schéma final de la pseudo-fonction, on peut substituer au chemin qui y a conduit un autre chemin se confondant optiquement avec lui, mais ayant des côtés dont le nombre et la petitesse sont arbitraires.*

IV. En considérant les deux schémas atteints par la pseudo-fonction au bout de chemins quelconques, mais conduisant en x' et x'', valeurs de x dont la différence a un module $< \delta$, nous dirons que le second est *contigu* au premier, s'il est possible de l'atteindre aussi par un développement construit avec celui-ci à partir de x'.

Par exemple, dans la suite des schémas

$$\Psi[x_0],\quad \Psi[x_0 x_1],\quad \Psi[x_0 x_1 x_2],\quad \ldots,\quad \Psi[x_0 x_1 x_2 \ldots x_i]$$

atteints successivement par la pseudo-fonction aux sommets du chemin $[x_0 x_1 \ldots x_i]$, chacun de ceux qui suivent le premier est contigu au précédent.

Quand $x'' = x'$, *le second schéma ne peut être contigu au premier sans lui être identique.* Pour obtenir le second schéma, il suffit effectivement de poser $x = x'$ dans une certaine série entière en $x - x'$ et dans toutes ses dérivées; on ne peut donc manquer de retrouver ainsi les coefficients de

$$1,\quad \frac{x - x'}{1},\quad \ldots,\quad \frac{(x - x')^m}{1.2\ldots m},\quad \ldots$$

dans ce même développement, c'est-à-dire les articles du premier schéma.

Quand $\operatorname{mod}(x'' - x')$ *est* $< \frac{\delta}{2}$, *le second schéma ne peut être contigu au premier sans que celui-ci ne le soit réciproquement à l'autre.*

Soit $[x_0 x_1 \ldots x_i x']$ le chemin dont x' est l'extrémité; comme on suppose

$$\operatorname{mod}(x'' - x') + \operatorname{mod}(x' - x'') = 2 \operatorname{mod}(x'' - x') < \delta,$$

on a (I)

$$\Psi[x_0 x_1 \ldots x_i x'] (= \Psi[x_0 x_1 \ldots x_i x' x']) = \Psi[x_0 x_1 \ldots x_i x' x'' x'].$$

Le premier schéma $\Psi[x_0 x_1 \dots x_i x']$ peut donc aussi être atteint en passant de x'' à x' au moyen d'un développement construit en x'' sur $\Psi[x_0 x_1 \dots x_i x' x'']$ qui est précisément le second schéma, à cause de sa contiguïté évidente avec le premier.

V. *Soient* $[x_0 x'_1 x'_2 \dots x'_{i'} x'_{i'+1}]$ *et* $[x_0 x''_1 x''_2 \dots x''_{i''} x''_{i''+1}]$ *deux chemins quelconques mais dont les derniers côtés sont inférieurs à* $\frac{\delta}{2}$, *eux et les distances mutuelles, tant de leurs premières que de leurs dernières extrémités, en sorte que l'on a les inégalités*

$$(9)\qquad \left\{\begin{aligned} &\operatorname{mod}(x'_{i'+1} - x'_{i'}) < \frac{\delta}{2}, &&\operatorname{mod}(x''_{i''+1} - x''_{i''}) < \frac{\delta}{2},\\ &\operatorname{mod}(x''_{i''} - x'_{i'}) < \frac{\delta}{2}, &&\operatorname{mod}(x''_{i''+1} - x'_{i'+1}) < \frac{\delta}{2}.\end{aligned}\right.$$

Si les schémas

$$(10)\qquad \Psi[x_0 x'_1 \dots x'_{i'}],\quad \Psi[x_0 x''_1 \dots x''_{i''}],$$

atteints par la pseudo-fonction en $x'_{i'}$, $x''_{i''}$ *sur les deux chemins en question respectivement, sont contigus l'un à l'autre, ceux*

$$(11)\qquad \Psi[x_0 x'_1 \dots x'_{i'} x'_{i'+1}],\quad \Psi[x_0 x''_1 \dots x''_{i''} x''_{i''+1}]$$

qu'elle atteint ensuite après de nouveaux pas faits sur chacun des mêmes chemins sont aussi contigus.

Comme les schémas (10) sont supposés contigus, on a

$$\Psi[x_0 x''_1 \dots x''_{i''}] = \Psi[x_0 x'_1 \dots x'_{i'} x''_{i''}],$$

d'où l'on conclut en faisant le nouveau pas $[x''_{i''} x''_{i''+1}]$

$$\Psi[x_0 x''_1 \dots x''_{i''} x''_{i''+1}] = \Psi[x_0 x'_1 \dots x'_{i'} x''_{i''} x''_{i''+1}].$$

Mais, comme les inégalités (9) donnent en particulier

$$\operatorname{mod}(x''_{i''} - x'_{i'}) + \operatorname{mod}(x''_{i''+1} - x''_{i''}) < \delta,$$

on a (I)

$$\Psi[x_0 x'_1 \dots x'_{i'} x''_{i''} x''_{i''+1}] = \Psi[x_0 x'_1 \dots x'_{i'} x''_{i''+1}],$$

relation dont la combinaison avec la précédente donne

$$\Psi[x_0 x''_1 \ldots x''_{i''} x''_{i''+1}] \quad = \Psi[x_0 x'_1 \ldots x'_{i'} x''_{i''+1}].$$

Les inégalités (9) donnant encore

$$\text{mod}(x'_{i'+1} - x'_{i'}) + \text{mod}(x''_{i''+1} - x'_{i'+1}) < \delta,$$

une seconde application de l'alinéa (I) conduira à

$$\Psi[x_0 x'_1 \ldots x'_{i'} x''_{i''+1}] \quad = \Psi[x_0 x'_1 \ldots x'_{i'} x'_{i'+1} x''_{i''+1}],$$

d'où, en combinant encore cette relation avec la précédente,

$$\Psi[x_0 x''_1 \ldots x''_{i''} x''_{i''+1}] \quad = \Psi[x_0 x'_1 \ldots x'_{i'} x'_{i'+1} x''_{i''+1}].$$

Ainsi donc le second des schémas (11) s'obtient en allongeant du seul pas $[x'_{i'+1} x''_{i''+1}]$ le chemin $[x_0 x'_1 \ldots x'_{i'+1}]$ qui conduit au premier; par suite, ces deux schémas sont bien contigus.

VI. *Si les chemins de même extrémité quelconque* X

$$[x_0 x'_1 x'_2 \ldots x'_i \mathrm{X}], \quad [x_0 x''_1 x''_2 \ldots x''_i \mathrm{X}]$$

sont composés de côtés en nombres égaux et tous inférieurs à $\frac{\delta}{2}$, *si, de plus, la distance mutuelle de deux sommets de même indice est toujours aussi inférieure à* $\frac{\delta}{2}$, *les deux schémas auxquels ils conduisent la pseudo-fonction en* X *sont identiques.*

Comme le schéma fondamental $\Psi[x_0]$ peut se dédoubler par la pensée en deux schémas contigus, on prouvera successivement, par l'application répétée de l'alinéa précédent (V), la contiguïté des schémas de mêmes rangs dans les deux suites

$$\Psi[x_0 x'_1], \quad \Psi[x_0 x'_1 x'_2], \quad \Psi[x_0 x'_1 x'_2 x'_3], \quad \ldots, \quad \Psi[x_0 x'_1 \ldots x'_i \mathrm{X}],$$
$$\Psi[x_0 x''_1], \quad \Psi[x_0 x''_1 x''_2], \quad \Psi[x_0 x''_1 x''_2 x''_3], \quad \ldots, \quad \Psi[x_0 x''_1 \ldots x''_i \mathrm{X}].$$

Les deux derniers sont donc identiques comme il fallait le prouver, puisqu'ils sont contigus et que les extrémités des chemins qui ont conduit à l'un et à l'autre coïncident (IV).

VII. *Deux chemins quelconques tracés dans l'aire* S *de* x_0

à la même extrémité X, *arbitraire aussi, conduisent la pseudo-fonction au même schéma final.*

Comme on peut subdiviser à volonté les côtés de chacun de ces deux chemins sans changer le schéma final auquel il conduit (III), comme d'autre part l'imperforation de l'aire S permet de déformer progressivement l'un jusqu'à le superposer à l'autre en ne lui faisant balayer qu'un espace faisant partie de cette aire, espace où, par suite, tous les chemins sont praticables, il est évidemment possible de tracer dans cet espace, de x_0 à X, des chemins en nombre limité N

$$(12) \qquad [\text{Ch.}]', \quad [\text{Ch.}]'', \quad \ldots, \quad [\text{Ch.}]^{(N)},$$

satisfaisant aux conditions suivantes :

1° Leurs côtés sont inférieurs à $\frac{\delta}{2}$ et en même nombre pour tous ;

2° Sur deux chemins consécutifs, deux sommets de rangs égaux à partir de x_0 sont séparés par une distance inférieure aussi à $\frac{\delta}{2}$.

3° Les chemins extrêmes $[\text{Ch.}]'$, $[\text{Ch.}]^{(N)}$ coïncident optiquement avec les chemins donnés.

Cela posé, et en vertu de l'alinéa précédent (VI), deux quelconques de ces chemins auxiliaires contigus dans la suite (12) conduisent en X au même schéma final.

Les chemins extrêmes de cette suite et, par conséquent aussi, les proposés qui leur sont équivalents, jouissent donc de la même propriété, ce que nous voulions établir.

174. Comme on peut toujours décomposer une aire même perforée, en parties individuellement imperforées, le théorème précédent montre que *la réduction des aires où une pseudo-fonction est oloïde, à des parties moindres, peut toujours donner de nouvelles aires où cette pseudo-fonction est une véritable fonction olotrope.*

Il ne faudrait pas croire qu'une pseudo-fonction oloïde dans une aire perforée ne peut y être monodrome. Il est clair, par exemple, que le cheminement opéré avec le schéma fondamental (4), dans une aire quelconque ne contenant pas l'origine, régénère la fonc-

tion x^{-p} que nous savons y être olotrope (**151**), à plus forte raison monodrome quand on la considère comme une pseudo-fonction. Cependant rien n'empêche l'aire en question d'avoir la forme d'une couronne ayant son centre à l'origine, et dans le vide de laquelle il est impossible de cheminer dans tous les sens en conservant aux pas une même longueur, si petite qu'elle soit.

175. Comme nous l'avons dit en commençant ce paragraphe, le cheminement est le mode de génération de très nombreuses fonctions, surtout de celles qu'il faut considérer comme *nouvelles,* c'est-à-dire qui ne sont pas exprimables par les procédés courants, au moyen de fonctions antérieurement connues. On peut dire en gros qu'il consiste en un *raccordement indéfini de séries de Taylor, construites à partir de systèmes successifs de valeurs initiales des variables.* Dans les questions *courantes,* il ne rencontre d'autres obstacles que des valeurs singulières (**144**), soit *isolées* quand il y a une seule variable, c'est-à-dire existant en nombre limité dans tout espace limité, soit formant des systèmes en suites continues, mais analogues à de simples quantités isolées, quand il y a plusieurs variables; sous la seule condition de tourner ces obstacles, on peut donc en général l'exécuter dans des aires quelconques, et à fort peu près dans tous les sens; mais il faut noter aussi qu'il en est quelquefois autrement ([1]).

([1]) J'emprunte à M. Lerch, d'après MM. Tannery et Molk (*Éléments de la théorie des fonctions elliptiques,* t. I, p. 76), l'exemple le plus simple des exceptions auxquelles je fais allusion.

La série entière

$$\mathfrak{P}(x) = x^1 + x^{1.2} + \ldots + x^{1.2.3\ldots k} + \ldots$$

admet évidemment 1 pour rayon de convergence; par suite (120), $\mathfrak{P}(x_i + h)$ est certainement développable en série entière par rapport à h pour toute valeur de x_i intérieure au cercle [1] décrit de l'origine comme centre avec 1 comme rayon, et pour toute valeur de h ayant un module $< 1 - \operatorname{mod} x_i$; mais certainement aussi, ce développement n'est pas possible, quand mod h a une valeur $H > 1 - \operatorname{mod} x_i$. Car s'il l'était, le cercle décrit de x_i comme centre avec un rayon $< H$ mais $> 1 - \operatorname{mod} x_i$ découperait sur la circonférence [1] un arc [γ] de corde γ non $= 0$, et sur lequel $\mathfrak{P}(x)$ serait évidemment olotrope; or ceci n'a pas lieu. On verra effectivement dans la deuxième Partie de cet Ouvrage (Chap. III) que le nombre 1 a, quel que soit l'entier n, n racines $n^{\text{ièmes}}$ situées toutes sur la circonférence [1] et s'y rangeant dans un ordre circulaire tel, que les différences de deux consécutives aient toutes pour module commun celui d'une quantité de la forme $\Phi\left(\frac{1}{n}\right) - 1$, où $\Phi(\mu)$ est

Le lecteur saisira mieux les principes de cette opération et sa portée considérable, quand elle nous fournira pour la première fois une nouvelle fonction (Chap. III de notre deuxième Partie); il comprendra mieux aussi les observations suivantes que nous devons ajouter à nos explications générales.

I. La connaissance *purement numérique* des divers articles du schéma fondamental ne permettrait guère d'évaluer bien facilement que les rayons de convergence du premier développement. Mais habituellement, ce schéma est donné, soit isolé, soit associé à ceux d'autres pseudo-fonctions, par les valeurs des premiers articles, accompagnées de relations générales entre eux et tous les autres articles, relations dérivant le plus souvent d'équations différentielles soit à une, soit à plusieurs fonctions inconnues (Chap. X, XI, XII, *inf.*). Ces relations s'étendent aux schémas subséquents, et c'est d'elles que l'on déduit sans trop de difficultés, pour toutes les étendues des aires S_x, S_y, ..., des limites inférieures des rayons de convergence des développements construits à partir de valeurs initiales quelconques des variables.

II. Souvent la définition de la pseudo-fonction comporte une ambiguïté donnant simultanément naissance à *plusieurs* schémas fondamentaux (Chap. XI, *inf.*). On est alors conduit, selon les circonstances et l'étendue des aires, à plusieurs pseudo-fonctions tantôt monodromes, tantôt non monodromes; dans ce dernier cas

---

une certaine fonction olotrope de μ tendant vers 1 quand μ tend vers 0. Si donc on prend n assez grand pour donner $\operatorname{mod}\left[\Phi\left(\frac{1}{n}\right)-1\right]<\gamma$, une au moins υ de ces racines tombe sur l'arc $[\gamma]$, et $\mathfrak{P}(x)$ est infinie quand x tend vers υ en suivant le rayon du cercle [1] qui conduit à ce point; car, en posant $x=\upsilon\xi$, le reste de cette série arrêtée à son terme de rang $n-1$ se réduit à

$$\xi^{1.2\ldots n}+\xi^{1.2\ldots n(n+1)}+\ldots,$$

quantité qui est infinie quand ξ tend vers 1 en conservant des valeurs positives <1 (128).

Où que soit x_i à l'intérieur du cercle [1], le développement de $\mathfrak{P}(x_i+h)$ offrant ainsi pour rayon de convergence maximum la distance $1-\operatorname{mod} x_i$ du point x_i à la circonférence de ce cercle, il est impossible de faire jamais un pas qui conduise hors de lui.

Pour la série entière citée au n° 119, on ne peut même faire un seul pas, si petit qu'il soit, à partir de la valeur initiale $x=0$.

elles peuvent rester distinctes les unes des autres, ou bien, en un même système de valeurs finales des variables, certaines données peuvent amener les unes à des schémas identiques à ceux que d'autres atteignent par des chemins différents.

III. Comme les chemins, pourvu qu'ils conservent les mêmes extrémités, peuvent être déformés arbitrairement dans les aires où il est permis de les tracer, et comme rien ne limite la petitesse de leurs côtés (173, III), on se contente de les représenter graphiquement par des lignes courbes où les extrémités de leurs côtés ne sont plus distinctes. Mais il ne faut pas oublier que c'est là une simple fiction; l'opération à laquelle nous donnons le nom de *cheminement* est *essentiellement discontinue* et ne comporte en réalité que des développements successifs en nombre *limité*.

IV. Pour rendre nos explications plus claires, nous avons cru devoir employer quelques mots nouveaux; mais, quand aucune confusion ne sera plus à craindre, nous pourrons les abandonner et laisser, comme on l'a fait jusqu'à présent, à nos pseudo-fonctions le nom de *fonctions,* bien qu'au propre il soit inexact, employer encore au lieu du mot *oloïde,* et toujours sous la même réserve, le mot *olotrope,* en lui adjoignant l'adverbe *localement,* quand il s'agira d'une fonction de cette espèce que nous ne saurons pas encore être monodrome, et qu'il importera de ne pas l'identifier prématurément avec une véritable fonction olotrope.

Enfin nous comprendrons sous le nom de *valeur initiale* ou *finale* d'une pareille fonction toutes les quantités dont nous avions appelé l'ensemble son *schéma fondamental* ou *final.*

176. *Quand les articles du schéma fondamental d'une pseudo-fonction oloïde sont tous nuls, elle est nulle identiquement aussi loin que le cheminement puisse conduire.*

Effectivement, la nullité supposée entraîne la nullité identique du premier développement dans les limites de sa convergence, puis la nullité numérique de tous les articles du deuxième schéma (160), et ainsi de suite indéfiniment.

177. On en conclut ces deux observations essentielles que

nous formulerons dans le langage abréviatif expliqué ci-dessus :

I. *Pour qu'une fonction localement olotrope soit nulle identiquement pendant toute la durée des cheminements praticables, il est nécessaire et suffisant que son premier développement jouisse de cette propriété* (**134**), (**176**).

II. *Pour que deux fonctions de cette espèce soient égales identiquement dans les mêmes circonstances, il faut et il suffit que leurs premiers développements le soient entre eux.*

178. Ajoutons, en terminant, que certains développements autres que la formule fondamentale de Taylor permettent d'étendre l'opération du cheminement *à des valeurs des variables même singulières pour la fonction considérée*. Nous ferons connaître les plus utiles dans le Chapitre IV de notre deuxième Partie.

CHAPITRE VII.

PROPRIÉTÉS FONDAMENTALES DES FONCTIONS QUI SONT OLOTROPES DANS DES AIRES DONNÉES.

Propositions générales diverses.

179. La seule différence existant entre une fonction olotrope dans des aires données et la somme d'une série entière en $x - x_0$, $y - y_0$, ... dont la convergence serait assurée pour toutes les valeurs de x, y, ... tombant dans ces aires, consiste en ce que cette dernière fonction est représentable par un *seul* et même développement, tandis que la première ne l'est que par *plusieurs* employés tour à tour et se raccordant les uns aux autres (*Cf.* 171 *et suiv.*). Il faut donc s'attendre, d'une part, à retrouver dans les fonctions olotropes beaucoup de propriétés appartenant aux séries entières (Chap. V), d'autre part, à en voir les démonstrations comporter souvent l'emploi de la méthode à laquelle nous avons donné le nom de *cheminement* (171). Le contenu du présent paragraphe justifiera ces observations générales.

180. *Si la fonction $f(x, y, \ldots)$ est olotrope dans des aires limitées S_x, S_y, ... (89), on peut assigner à son module une limite supérieure indépendante de x, y, ..., pour toutes valeurs de ces variables tombant dans les aires dont il s'agit.*

On peut évidemment subdiviser chacune de ces aires en un nombre limité de fragments de dimensions inférieures à l'olomètre correspondant (*loc. cit.*). Cela posé, soient s_x, s_y, ... une combinaison quelconque de ces aires partielles et x_0, y_0, ... un système de valeurs initiales prises arbitrairement à leur intérieur. Par définition, $f(x, y, \ldots)$ est représentable par une série entière en $x - x_0$, $y - y_0$, ..., ayant les olomètres donnés pour rayons

de convergence. Il en résulte que les valeurs de $x, y, \ldots$ tombant dans $s_x\ s_y, \ldots$ donneront aux modules de ces différences des valeurs toujours inférieures à certaines quantités plus petites elles-mêmes que ces rayons; il en résulte par suite (117) qu'on pourra assigner au module de la somme de cette série, c'est-à-dire de $f(x, y, \ldots)$, une limite supérieure indépendante de $x, y, \ldots$, pour toutes les valeurs des variables dont il s'agit.

Ainsi, pour chaque combinaison des aires partielles ci-dessus définies, la limite supérieure mentionnée dans notre énoncé existe; ces aires partielles étant en nombres limités, leurs combinaisons le sont aussi, les limites supérieures relatives à chacune également. Il existe donc une de ces limites qui surpasse toutes les autres et au-dessous de laquelle se maintiendra bien le module de notre fonction, pour toutes les valeurs de $x, y, \ldots$ situées dans les aires totales considérées $S_x, S_y, \ldots$.

181. Comme $f(x, y, \ldots)$ est encore olotrope dans les aires S_x, $S_y, \ldots$ renforcées par l'addition de zones d'épaisseurs inférieures à ses olomètres (142), *on peut aussi*, en vertu du théorème précédent, *assigner une limite supérieure à son module, dans toute l'étendue des aires ainsi accrues.*

182. *Si $f(x, y, \ldots)$ est olotrope en $x_0, y_0, \ldots$ avec les olomètres $\delta_x, \delta_y, \ldots$, et si l'on représente par $r_x, r_y, \ldots$ des quantités positives inférieures à ceux-ci, par* M *une limite supérieure de* $\operatorname{mod} f(x, y, \ldots)$ *sur les circonférences décrites avec ces derniers rayons, des points $x_0, y_0, \ldots$ comme centres* (181), *on a, pour toutes valeurs des indices $m, n, \ldots$*

$$(1) \qquad \operatorname{mod} f^{(m,n,\ldots)}(x_0, y_0, \ldots) < \mathrm{M}\, \frac{1.2\ldots m}{r_x^m}\, \frac{1.2\ldots n}{r_y^n} \cdots$$

Le développement, par la formule de Taylor, de

$$f(x_0 + h, y_0 + k, \ldots)$$

est effectivement une série entière en $h, k, \ldots$, ayant $\delta_x, \delta_y, \ldots$ pour rayons de convergence, et contenant le terme

$$\frac{f^{(m,n,\ldots)}(x_0, y_0, \ldots)}{1.2\ldots m.1.2\ldots n.1\ldots}\, h^m k^n \ldots \quad (164).$$

On peut donc (**130**) trouver pour $h, k, \ldots$ des valeurs H, K, ... de modules $r_x < \delta_x$, $r_y < \delta_y$, ..., donnant

$$\operatorname{mod} f(x_0 + \mathrm{H}, y_0 + \mathrm{K}, \ldots) \geqq \operatorname{mod} f^{(m,n,\ldots)}(x_0, y_0, \ldots) \frac{r_x^m}{1.2\ldots m} \frac{r_y^n}{1.2\ldots n} \cdots,$$

inégalité dont la combinaison avec

$$\mathrm{M} > \operatorname{mod} f(x_0 + \mathrm{H}, y_0 + \mathrm{K}, \ldots)$$

conduit immédiatement à la relation (1) que nous nous proposions d'établir.

183. En supposant que $f(x, y, \ldots)$ est olotrope dans les aires limitées S_x, S_y, ... avec les olomètres δ_x, δ_y, ..., que M représente une limite supérieure de $\operatorname{mod} f(x, y, \ldots)$ pour toutes valeurs de $x, y, \ldots$ tombant dans ces aires accrues de zones additionnelles d'épaisseurs comprises entre r_x, r_y, ... et ces olomètres (**181**), *l'inégalité* (1) *entraîne immédiatement cette autre*

$$(2) \qquad \operatorname{mod} f^{(m,n,\ldots)}(x, y, \ldots) < \mathrm{M} \frac{1.2\ldots m}{r_x^m} \frac{1.2\ldots n}{r_y^n} \cdots,$$

s'étendant maintenant à tout l'intérieur des aires considérées.

Cette formule constitue une relation des plus remarquables entre : 1° la grandeur du module d'une dérivée d'ordre quelconque d'une fonction olotrope, 2° celle du module maximum de cette fonction elle-même dans les aires où l'on sait qu'elle jouit de cette propriété, 3° celles de ses olomètres et des indices de différentiation. Elle-même, ou bien celles d'où elle dérive (**130, 131, 132, 180, 182**) nous seront d'une utilité majeure dans plusieurs théories de la plus haute importance (**201, 247, 273, 274, 275, 301, 362**, *inf.*).

184. *Une fonction olotrope $f(x, y, \ldots)$ est continue* (**125**) *dans toute l'étendue des aires où elle jouit de cette propriété.*

Soient $x', y', \ldots$ des valeurs particulières des variables prises à volonté dans ces aires, et faisons tendre x vers x', y vers y', ... Comme, en posant

$$x = x' + h, \qquad y = y' + k, \qquad \ldots,$$

$h, k, \ldots$ sont des quantités infiniment petites, il arrive un moment après lequel les modules de $h, k, \ldots$ restent moindres que les olomètres, et où $f(x'+h, y'+k, \ldots)$ est développable en une série entière en $h, k, \ldots$. Dans cette série, $f(x', y', \ldots)$ est précisément le terme indépendant de ces accroissements. On a donc bien (**124**)

$$\lim f(x, y, \ldots) = \lim f(x'+h, y'+k, \ldots) = f(x', y', \ldots).$$

Au n° **200** *bis* (*inf.*) on trouvera une extension de cette proposition qui est quelquefois utile.

185. *Si la fonction $f(x, y, \ldots)$ est olotrope dans des aires limitées S_x, S_y, ..., et si, quelque petite que soit la quantité positive ω, on peut trouver dans ces aires des valeurs de x, y, ... rendant*

$$\operatorname{mod} f(x, y, \ldots) < \omega,$$

on pourra aussi en trouver au moins un système qui satisfera à l'équation

$$f(x, y, \ldots) = 0.$$

Considérons une suite illimitée de quantités positives décroissant sans cesse et indéfiniment

$$\omega_1, \quad \omega_2, \quad \ldots, \quad \omega_m, \quad \ldots,$$

et appelons $x_m, y_m, \ldots$ un système de ces valeurs des variables, qui, par hypothèse, donnent

$$\operatorname{mod} f(x_m, y_m, \ldots) < \omega_m.$$

De la suite illimitée de ces systèmes, extrayons-en une partielle dont le terme général $(x^{(n)}, y^{(n)}, \ldots)$ soit composé de variantes tendant toutes vers certaines limites X, Y, ... (**91**). On aura évidemment

$$\lim f(x^{(n)}, y^{(n)}, \ldots) = \lim f(x_m, y_m, \ldots) = 0.$$

Mais, à cause de

$$\lim x^{(n)} = X, \qquad \lim y^{(n)} = Y, \qquad \ldots.$$

on a aussi (184)

$$\lim f(x^{(n)}, y^{(n)}, \ldots) = f(X, Y, \ldots).$$

Donc on a bien

$$f(X, Y, \ldots) = 0,$$

les quantités X, Y, ... tombant évidemment dans les aires considérées.

186. *Quand une fonction est olotrope dans des aires limitées sans pouvoir s'y évanouir, on peut assigner à son module une limite inférieure positive indépendante des variables, au-dessous de laquelle sa valeur ne peut s'abaisser, quelles que soient celles des variables dans les aires dont il s'agit.*

Car, si cette limite inférieure n'existait pas, le module de la fonction pourrait, dans les aires considérées, acquérir une valeur inférieure à toute quantité donnée, et (185) on pourrait trouver dans ces aires des valeurs des variables annulant la fonction, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Une observation que nous ferons plus tard (250, II, *inf.*) fournit une démonstration directe du même théorème. Puisque la fonction proposée $f(x, y, \ldots)$ est olotrope dans les aires considérées sans s'y évanouir, son inverse arithmétique $\frac{1}{f(x, y, \ldots)}$ y est aussi olotrope; et, puisque ces aires sont limitées, on y a sans cesse

$$\text{mod}\frac{1}{f(x, y, \ldots)} < M,$$

où M désigne quelque constante positive (180). On y a donc aussi

$$\text{mod} f(x, y, \ldots) > \frac{1}{M}.$$

187. *Quand une fonction $f(x, y, \ldots)$ olotrope dans des aires quelconques S_x, S_y, ... s'y évanouit identiquement, c'est-à-dire pour tout système de valeurs particulières des variables qui sont contenues dans ces aires, ses dérivées de tous ordres y sont nulles identiquement aussi.*

Réciproquement, si la fonction et ses dérivées de tous ordres

s'annulent numériquement en un seul système $x_0, y_0, \ldots$ de pareilles valeurs de $x, y, \ldots$, elle est nulle identiquement dans toute l'étendue des aires considérées.

La première partie de ce théorème est évidente, puisque la fonction y est supposée se réduire à la constante o (161).

Quant à la dernière, elle résulte immédiatement de la proposition du n° 176. Car on peut considérer $f(x, y, \ldots)$ comme une pseudo-fonction oloïde dans les aires données S_x, S_y, ..., définie par un schéma fondamental ayant pour articles les valeurs en $x_0, y_0, \ldots$ de $f(x, y, \ldots)$ et de ses dérivées de tous ordres; or ces articles sont tous nuls par hypothèse.

188. *Si dans chacune des suites illimitées*

$$(3)\qquad \begin{cases} x', & x'', & \ldots, & x^{(p)}, & \ldots\ldots\ldots \\ y', & y'', & \ldots\ldots\ldots, & y^{(q)}, & \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

tous les termes sont inégaux et tombent respectivement dans des aires limitées S_x, S_y, ..., *et si, appelant $f(x, y, \ldots)$ une fonction olotrope dans ces aires, on a, quels que soient les rangs $p, q, \ldots$,*

$$f(x^{(p)}, y^{(q)}, \ldots) = 0,$$

cette fonction est nulle identiquement dans les aires dont il s'agit.

A cause de la limitation des aires S_x, S_y, ..., on peut extraire respectivement des suites (3) des suites partielles

$$\begin{matrix} x_1, & x_2, & \ldots, & x_m, & \ldots\ldots\ldots \\ y_1, & y_2, & \ldots\ldots\ldots, & y_n, & \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{matrix}$$

dont les termes généraux tendent tous vers certaines limites x_0, y_0, ... évidemment situées dans ces aires (91), et l'on a en particulier, quels que soient $m, n, \ldots$,

$$f(x_m, y_n, \ldots) = 0.$$

Il s'ensuit que la somme de la série entière en $h, k, \ldots$ résul-

tant du développement de $f(x_0 + h, y_0 + k, \ldots)$ s'évanouit pour toutes les combinaisons de valeurs de ces accroissements appartenant respectivement aux suites illimitées

$$\begin{array}{lll} x_1 - x_0, & x_2 - x_0, & \ldots \\ y_1 - y_0, & y_2 - y_0, & \ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots, \end{array}$$

suites dont les termes généraux sont tous infiniment petits et finissent en conséquence par rester intérieurs aux cercles de convergence.

Le théorème du n° **135** devient alors évidemment applicable et assigne o pour valeur commune à tous les coefficients de cette série, par suite, en $x_0, y_0, \ldots$, à $f(x, y, \ldots)$ et à toutes ses dérivées qui diffèrent de ces coefficients par de simples facteurs constants (**162**). Notre fonction est donc bien identiquement nulle (**187**).

189. *Pour que deux fonctions olotropes dans de mêmes aires quelconques y soient identiquement égales, il est nécessaire et suffisant qu'en un seul système de valeurs particulières des variables, d'ailleurs arbitrairement choisies, ces fonctions et toutes leurs dérivées prennent les mêmes valeurs numériques.*

L'identité voulue entre les deux fonctions considérées

$$f(x, y, \ldots) = F(x, y, \ldots)$$

équivaut à la nullité identique de leur différence

$$f(x, y, \ldots) - F(x, y, \ldots),$$

par suite (**187**) à la condition numérique

$$D^{(p,q,\ldots)}_{x,y,\ldots}[f(x, y, \ldots) - F(x, y, \ldots)] = 0,$$

pour $x = x_0$, $y = y_0$, $\ldots$, quels que soient les indices de différentiation $p, q, \ldots$. Or à son tour cette condition équivaut à

$$f^{(p,q,\ldots)}_{x,y,\ldots}(x_0, y_0, \ldots) - F^{(p,q,\ldots)}_{x,y,\ldots}(x_0, y_0, \ldots) = 0,$$

c'est-à-dire à

$$f^{(p,q,\ldots)}_{x,y,\ldots}(x_0, y_0, \ldots) = F^{(p,q,\ldots)}_{x,y,\ldots}(x_0, y_0, \ldots),$$

parce que les dérivées de la différence de deux fonctions sont précisément les différences des dérivées semblables de ces mêmes fonctions (166).

190. En vertu de ce théorème, *une fonction olotrope est complètement déterminée par la simple connaissance des valeurs prises par elle-même et par ses dérivées de tous ordres, en un seul système de valeurs particulières des variables* (*Cf.* 171).

191. *Pour qu'une fonction olotrope dans des aires données s'y réduise à un polynôme entier de degré effectif* (29) *égal ou inférieur à l'entier* M, *il faut et il suffit qu'en* $x_0, y_0, \ldots$, *système de valeurs particulières des variables choisies arbitrairement dans ces aires, toutes ses dérivées dont les ordres totaux surpassent* M *s'évanouissent.*

Nous connaissons déjà la nécessité de cette condition (161); pour prouver qu'elle est suffisante, formons le développement de la fonction proposée $f(x, y, \ldots)$ en série entière par rapport aux différences $x - x_0, y - y_0, \ldots$, et appelons $P(x, y, \ldots)$ la somme des termes de ce développement, dont les degrés par rapport à ces différences sont égaux ou inférieurs à M. Il est évident que P est un polynôme entier en $x, y, \ldots$ dont le degré ne surpasse pas M, et dont les dérivées d'ordres égaux ou inférieurs à M prennent, en $x_0, y_0, \ldots$, précisément les valeurs initiales des dérivées semblables de $f(x, y, \ldots)$.

D'ailleurs pour les ordres supérieurs, et toujours en $x_0, y_0, \ldots$, les dérivées de $f(x, y, \ldots)$ et de $P(x, y, \ldots)$ sont encore égales puisqu'elles sont toutes nulles, savoir celles de $f(x, y, \ldots)$, par hypothèse, celles de $P(x, y, \ldots)$, parce que c'est un polynôme entier dont le degré ne surpasse pas M (161). Donc (189) on a bien identiquement

$$f(x, y, \ldots) = P(x, y, \ldots).$$

192. *Pour que la même fonction jouisse des propriétés spécifiées dans l'énoncé précédent, il est nécessaire et suffisant que, dans les aires considérées, ses diverses dérivées d'ordre total* $M+1$ *soient toutes identiquement nulles.*

Nous connaissons encore la nécessité de la condition posée (161);

sa suffisance est maintenant à peu près évidente, car, si les dérivées d'ordre $M + 1$ sont identiquement nulles, leurs dérivées de tous ordres le sont aussi (*loc. cit.*); toutes celles de la fonction proposée dont les ordres surpassent M le sont donc. Or (**191**) il suffit de savoir que les valeurs de toutes ces dérivées se réduisent à o en un seul système de valeurs particulières des variables, pour avoir la certitude que la fonction se réduit à un polynôme entier de degré M au plus.

193. Le cas où $M = 0$ est particulièrement remarquable et donne ce théorème qui trouve de bien fréquentes applications :

Pour qu'une fonction olotrope dans des aires quelconques dégénère en quelque constante, il est nécessaire et suffisant que toutes ses dérivées premières y soient nulles identiquement.

194. En raisonnant de la même manière on trouve cette autre proposition non moins utile :

Pour que la même fonction se trouve en fait indépendante de quelques-unes de ses variables, il faut et il suffit que ses dérivées premières prises par rapport à ces variables soient toutes identiquement nulles.

195. Quand une fonction olotrope ne dégénère pas en une constante, ses dérivées de tous ordres ne peuvent jamais s'évanouir simultanément en un même système quelconque $x_0, y_0, \ldots$ de valeurs particulières des variables (**191**), et il existe des ordres contenant des dérivées non nulles. Si donc M est le plus petit d'entre eux, l'accroissement de la fonction correspondant à des accroissements infiniment petits $h, k, \ldots$ attribués aux variables à partir de $x_0, y_0, \ldots$ prend, après la suppression des termes du développement pourvus de coefficients nuls, la forme évidente (**116**)

$$f(x_0 + h, y_0 + k, \ldots) - f(x_0, y_0, \ldots) = \Sigma_{\mu,\nu,\ldots}[(A_{\mu,\nu,\ldots} + \varepsilon_{\mu,\nu,\ldots})h^\mu k^\nu \ldots]$$

dans laquelle on a (**164**)

$$A_{\mu,\nu,\ldots} = \frac{1}{1.2\ldots\mu}\,\frac{1}{1.2\ldots\nu}\cdots f^{(\mu,\nu,\ldots)}_{x,y,\ldots}(x_0, y_0, \ldots),$$

et où ..., $\varepsilon_{\mu,\nu,\ldots}$, ... sont des sommes de séries entières en h, k, ... ne contenant pas de termes indépendants de ces quantités, par suite des quantités infiniment petites. De plus, la sommation doit être étendue à tous les systèmes de valeurs des indices de différentiation μ, ν, ... qui donnent $\mu+\nu+\ldots=\text{M}$.

Le second membre de cette relation ne diffère ainsi de

$$(4) \qquad \Sigma(\text{A}_{\mu,\nu,\ldots} h^\mu k^\nu \ldots),$$

polynôme entier, homogène et de degré M par rapport aux accroissements h, k, ... des variables, qui n'est pas identiquement nul, parce qu'il contient au moins un coefficient non $=0$, que de

$$\Sigma(\varepsilon_{\mu,\nu,\ldots} h^\mu k^\nu \ldots),$$

sorte de polynôme de même nature, mais à coefficients tous infiniment petits. Une pareille expression se nomme quelquefois un *infiniment petit d'ordre* M par rapport aux infiniment petits *fondamentaux* h, k, ..., et l'on dit que le polynôme (4) en est la *partie principale*.

Ainsi donc, *l'accroissement d'une pareille fonction olotrope est toujours un infiniment petit d'ordre entier par rapport à ceux des variables, et cet ordre est précisément le plus petit de ceux des dérivées qui ne s'évanouissent pas en* x_0, y_0, ...

Comme les dérivées premières de cette fonction ne peuvent être identiquement nulles (193), *cet ordre ne peut s'élever au-dessus de* 1 *que pour des systèmes exceptionnels de valeurs des variables.*

196. *Le rapport à l'accroissement infiniment petit d'une seule variable d'une fonction olotrope, de l'accroissement simultané de cette fonction, tend vers une limite précisément égale à la dérivée partielle première de celle-ci par rapport à la variable considérée.*

On trouve immédiatement en effet (164)

$$f(x+h, y, \ldots) = f(x, y, \ldots) + \frac{df}{dx}\frac{h}{1} + \frac{d^2f}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} + \ldots,$$

d'où

$$\frac{f(x+h, y, \ldots)-f(x, y, \ldots)}{h}=\frac{df}{dx}+\frac{1}{1.2}\frac{d^2f}{dx^2}h+\ldots.$$

ce qui rend évident le point dont il s'agit (**124**).

197. Aujourd'hui encore, on définit habituellement une fonction de variables imaginaires : *une quantité variable ayant pour éléments* (**56**) *deux fonctions réelles quelconques de tous les éléments des variables indépendantes considérées*. Par exemple, en appelant x', x'' les deux éléments de la variable indépendante x, et $\varphi(x', x'')$, $\psi(x', x'')$ deux fonctions réelles quelconques de x', x'', on dit à ce point de vue que

$$\varphi(x', x'')+i\psi(x', x'')$$

est une fonction de $x=x'+ix''$. De plus, on appelle encore *dérivée première* de cette fonction la limite (quand elle existe) du rapport

$$\frac{\Delta\varphi+i\Delta\psi}{\Delta x'+i\Delta x''}$$

de son accroissement à celui de la variable supposé infiniment petit. Mais, comme rien dans cette définition ne restreint le choix relatif à faire des fonctions $\varphi(x', x'')$, $\psi(x', x'')$, il fallait faire une distinction entre les fonctions de ce genre, pour lesquelles ce rapport tend vers une limite indépendante du mode de décroissance relative de $\Delta x'$, $\Delta x''$, et celles, infiniment plus nombreuses, pour lesquelles une semblable limite n'existe pas. On rejette ces dernières de l'Analyse et l'on donne aux autres le nom de fonctions *monogènes*.

Nos fonctions olotropes sont donc en particulier *monogènes;* mais c'est un fait absolument sans intérêt pour nous, car la manière dont nous présentons les choses nous dispense de toute distinction et de toute restriction.

On sait que l'autorité, pourtant considérable, du nom de Lagrange n'a pas empêché les géomètres de conserver jusqu'à nos jours la conclusion du théorème précédent pour définition des dérivées. Ce fait est pour nous incompréhensible, étant données les complications inextricables, les obscurités et même les pué-

rilités sans nombre, dont cette définition a semé l'exposition des principes de l'Analyse infinitésimale. Nous abandonnons complètement cette définition, non seulement parce qu'elle n'est pas conforme à la conception des fonctions analytiques à laquelle on est forcément amené quand on veut saisir et rapprocher les faits généraux de leur théorie, mais encore parce qu'elle ne conduit et ne peut conduire à rien de satisfaisant, parce qu'il faut l'abandonner dès qu'on veut entrer dans le cœur des choses. En veut-on un exemple? Nous demanderons à ceux qui y restent fidèles comme à un culte pourquoi, dans l'intégration des équations différentielles (Chap. X, XII, *inf.*), ils cherchent des fonctions dont les développements en séries entières ont des coefficients satisfaisant à la loi voulue, au lieu de reconstruire directement les fonctions continues dont les accroissements infiniment petits auraient avec ceux des variables des rapports dont les limites seraient liées aux autres quantités de la question par les équations données.

On nous objectera certainement les services que cette conception des dérivées rend dans l'Analyse appliquée à la Géométrie, à la Mécanique, etc. Nous répondrons que la croyance à l'importance de ces services est une simple affaire d'habitude. Dans la dernière Partie de cet Ouvrage, qui sera consacrée aux Applications géométriques, nous n'aurons presque jamais à considérer une dérivée comme limite de quelque rapport.

198. Le théorème du n° **196** est susceptible de généralisations que nous nous bornerons à mentionner, parce qu'elles sont sans utilité.

Il équivaut à l'énonciation de ce fait, que la partie principale (**195**) de l'accroissement ou *différence* infiniment petite

$$f(x+h, y, \ldots)-f(x, y, \ldots),$$

se réduit à $h\,\frac{df}{dx}$.

De même, si l'on attribue à $x, y, \ldots$ une suite de systèmes de valeurs formant autant de progressions arithmétiques ayant respectivement pour raisons les quantités infiniment petites $h, k, \ldots,$ si l'on nomme comme d'usage *différence première* Δf la fonction

de $x, y, \ldots, h, k, \ldots$ définie par la relation

$$\Delta f = f(x+h, y+k, \ldots) - f(x, y, \ldots),$$

puis *différence seconde* $\Delta^2 f$ le résultat

$$\begin{aligned}[f(x+2h, y+2k, \ldots) - f(x+h, y+k, \ldots)]\\ - [f(x+h, y+k, \ldots) - f(x, y, \ldots)]\\ = f(x+2h, y+2k, \ldots) - 2f(x+h, y+k, \ldots) + f(x, y, \ldots)\end{aligned}$$

obtenu en retranchant Δf de ce que devient cette différence quand on y fait croître $x, y, \ldots$ de $h, k, \ldots$ encore, et ainsi de suite, on trouve sans peine que $\Delta^M f$ est un infiniment petit d'ordre M par rapport à $h, k, \ldots$ (195) ayant pour partie principale le polynôme entier, homogène et de degré M en $h, k, \ldots$

$$\sum_{p,q,\ldots} \left[\frac{1.2\ldots M}{1.2\ldots p.1.2\ldots q.1\ldots} f^{(p,q,\ldots)}_{x,y,\ldots}(x, y, \ldots) h^p k^q \ldots \right],$$

expression dans laquelle il faut sommer pour tous les systèmes p, $q, \ldots$ de solutions entières et positives de l'équation indéterminée

$$p + q + \ldots = M.$$

En d'autres termes, *la partie principale de la différence* $\Delta^M f$ *est précisément la différentielle totale* $d^M f$ (167).

On arriverait à un résultat analogue, plus compliqué toutefois sans être plus utile, en construisant $\Delta f, \Delta^2 f, \ldots, \Delta^M f$ avec des valeurs des variables dont les accroissements infiniment petits successifs

$$(h_1, k_1, \ldots), (h_2, k_2, \ldots), \ldots, (h_M, k_M, \ldots),$$

ne conserveraient pas comme tout à l'heure les valeurs uniformes $h, k, \ldots$.

199. Ici viendraient assez naturellement des propriétés spéciales aux fonctions olotropes réelles, dont la connaissance est indispensable aux calculs numériques; mais, intéressant plutôt les fonctions d'une seule variable, elles seront mieux placées dans notre deuxième Partie.

Nous terminons ce paragraphe par une proposition sans intérêt

par elle-même, qui, cependant, sera plus d'une fois pour nous un lemme indispensable.

Soient $f(x, y, \ldots)$ une fonction olotrope dans les aires S_x, S_y, ... avec les olomètres δ_x, δ_y, ..., puis δ'_x, δ'_y, ..., ε_h, ε_k, ..., δ'_h, δ'_k, ... des quantités positives satisfaisant aux inégalités

$$(5) \qquad \delta'_x + \varepsilon_h + \delta'_h < \delta_x, \quad \delta'_y + \varepsilon_k + \delta'_k < \delta_y, \quad \ldots,$$

puis enfin, dans les plans servant à la représentation graphique des nouvelles variables h, k, ..., des aires S_h, S_k, ... dont les distances de tous les points aux origines O_h, O_k, ... soient toujours respectivement inférieures à ε_h, ε_k, ... La sommation partielle de tels termes que l'on voudra dans le développement de Taylor

$$f(x+h, y+k, \ldots) = \sum \left[f^{(m,n,\ldots)}_{x,y,\ldots}(x, y, \ldots) \frac{h^m}{1.2\ldots m} \frac{k^n}{1.2\ldots n} \cdots \right],$$

divisés par tel monôme entier $h^p k^q \ldots$, en h, k, ..., qu'ils pourraient avoir comme facteur commun, donne une fonction de $x, y, \ldots, h, k, \ldots,$

$$\varphi(x, y, \ldots, h, k, \ldots),$$

qui est olotrope dans les aires S_x, S_y, ..., S_h, S_k, ... avec les olomètres δ'_x, δ'_y, ..., δ'_h, δ'_k, ...

Comme le développement ci-dessus a δ_x, δ_y, ... pour rayons de convergence, on peut, à cause des inégalités (5), mettre

$$f(x + \overline{h' + h + {}'h}, y + \overline{k' + k + {}'k}, \ldots)$$

sous forme d'une série entière en h', k', ..., h, k, ..., $'h$, $'k$, ... ayant pour rayons de convergence δ'_x, δ'_y, ..., ε_h, ε_k, ..., δ'_h, δ'_k, ... (**120**), cela bien entendu pour toutes valeurs de x, y, ... intérieures aux aires considérées S_x, S_y, ...

Si donc on donne à h', k', ..., $'h$, $'k$, ... des modules inférieurs aux rayons correspondants ci-dessus, à h, k, ... des modules inférieurs à ε_h, ε_k, ..., c'est-à-dire si l'on n'attribue à h, k, ... que des valeurs intérieures aux aires S_h, S_k, ..., cette nouvelle série restera convergente même après la substitution à chaque

terme de son module (116); la sommation de ceux de ses termes dont le groupement reconstituerait

$$(h+'h)^p(k+'k)^q\ldots\varphi(x+h', y+k', \ldots, h+'h, k+'k, \ldots)$$

suivie de la division de la somme par $(h+'h)^p(k+'k)^q, \ldots,$ engendre une série partielle en $h', k', \ldots, h, k, \ldots, 'h, 'k, \ldots$ ayant les mêmes rayons de convergence (*loc. cit., passim*). Or cette série partielle ordonnée par rapport à $h', k', \ldots, 'h, 'k, \ldots$ est précisément le développement par la formule de Taylor de

$$\varphi(x, y, \ldots, h, k, \ldots)$$

à partir de valeurs de $x, y, \ldots, h, k, \ldots$ tombant dans les aires $S_x, S_y, \ldots, S_h, S_k, \ldots,$ pour des valeurs des accroissements $h', k', \ldots, 'h, 'k, \ldots$ ayant des modules inférieurs à δ'_x, $\delta'_y, \ldots, \delta'_h, \delta'_k, \ldots.$

200. Nous utiliserons moins cette proposition elle-même que son corollaire évident : *Pour tout système de valeurs de $x, y, \ldots$ tombant dans les aires limitées $S_x, S_y, \ldots$ et de $h, k, \ldots$ ayant des modules égaux ou inférieurs à quelques quantités positives $\varepsilon_h, \varepsilon_k, \ldots$ inférieures à $\delta_x, \delta_y, \ldots,$ on peut assigner une même limite supérieure à* mod $\varphi(x, y, \ldots, h, k, \ldots)$ (180).

200 *bis*. *Les aires $S_x, S_y, \ldots$ étant encore supposées toutes limitées, la différence $f(x+h, y+k, \ldots)-f(x, y, \ldots)$ est infiniment petite quand $h, k, \ldots$ tendent vers o, et cela de quelque manière que $x, y, \ldots$ varient simultanément à l'intérieur des aires dont il s'agit.*

Car l'emploi de la formule de Taylor permet de mettre cette différence sous la forme $Hh+Kk+\ldots,$ où H, K, ... sont des fonctions toutes du genre de $\varphi(x, y, \ldots, h, k, \ldots)$, aux modules desquelles on finit en conséquence par pouvoir assigner des limites supérieures indépendantes de $x, y, \ldots, h, k, \ldots$ (200).

Limites de convergence de la série de Taylor.

201. *Quand une fonction est olotrope dans les aires (quelconques) $S_x, S_y, \ldots$ avec les olomètres (quelconques) δ_x,*

δ_y, ..., *et qu'on ne sait rien de plus sur elle, son développement en série entière à partir des valeurs initiales* $x_0, y_0, \ldots$ (*tombant, bien entendu, dans les aires considérées*) *a pour rayons de convergence maximums les quantités positives obtenues en ajoutant* $\delta_x, \delta_y, \ldots$ *respectivement à* $\Delta_{x_0}, \Delta_{y_0}, \ldots$, *rayons des plus grands cercles de centres* $x_0, y_0, \ldots$ *qui n'ont aucun point extérieur aux aires dont il s'agit.*

I. On ne peut assigner au développement de la fonction des rayons de convergence supérieurs à ceux définis dans l'énoncé; autrement, en effet, il en résulterait évidemment qu'elle serait olotrope avec les mêmes olomètres en quelques points *extérieurs* aux aires considérées, ce que l'on ignore. Nous avons donc à prouver seulement l'existence des rayons dont il s'agit, ce que nous ferons en raisonnant sur le cas d'une seule variable pour fixer les idées et abréger l'écriture.

II. *Soient* $f(x)$ *une fonction olotrope avec l'olomètre* δ *dans une aire* S *contenant l'origine* $x = 0$, Δ *le rayon du plus grand cercle qui offre cette origine pour centre sans avoir aucun point extérieur à l'aire* S, *et* R, $\mathfrak{R}$ *deux quantités positives satisfaisant à l'inégalité*

$$\mathrm{R} + \mathfrak{R} \lesseqgtr \Delta + \delta. \tag{1}$$

Si le développement de $f(x)$ *par la formule de Maclaurin*

$$f(x) = \Sigma a_m x^m \tag{2}$$

admet R *pour rayon de convergence, et si son développement par la formule de Taylor, à partir de toute valeur de* x *de module inférieur à* R,

$$f(x + \mathfrak{x}) = \Sigma f^{(\mathfrak{m})}(x) \frac{\mathfrak{x}^{\mathfrak{m}}}{1.2\ldots\mathfrak{m}} \tag{3}$$

admet $\mathfrak{R}$ *pour rayon de convergence, le développement* (2) *admet certainement la somme* $\mathrm{R} + \mathfrak{R}$ *pour rayon de convergence.*

Appelons r, $\mathfrak{r}$ deux quantités positives quelconques satisfaisant aux inégalités

$$r < \mathrm{R}, \quad \mathfrak{r} < \mathfrak{R},$$

et, par suite, à cause de l'inégalité (1), à

$$r + \mathfrak{r} < \mathrm{R} + \mathfrak{R} < \Delta + \delta.$$

A cause de cette dernière, tous les points non extérieurs au cercle qui a l'origine pour centre et $r + \mathfrak{r}$ pour rayon le sont aussi à l'aire S accrue d'une zone additionnelle d'épaisseur $\delta' < \delta$; par suite (181), on peut assigner à $\operatorname{mod} f(x)$ une limite supérieure M indépendante de x, pour toutes les valeurs de x dont les modules sont égaux ou inférieurs à $r + \mathfrak{r}$. Et comme, pour

$$\text{(4)} \qquad \operatorname{mod} x \mathrel{\substack{=\\<}} r, \qquad \operatorname{mod} \mathfrak{r} \mathrel{\substack{=\\<}} \mathfrak{r},$$

on a

$$\operatorname{mod}(x + \mathfrak{r}) \mathrel{\substack{=\\<}} r + \mathfrak{r},$$

on aura certainement

$$\text{(5)} \qquad \operatorname{mod} f(x + \mathfrak{r}) < \mathrm{M},$$

pour toute combinaison de valeurs de x, $\mathfrak{r}$ satisfaisant aux inégalités (4).

Cela posé, une première application du théorème du n° 131 à la série (3), entière en $\mathfrak{r}$ et de rayon de convergence $\mathfrak{R} > \mathfrak{r}$, donne à cause de (5)

$$\operatorname{mod} f^{(\mathfrak{m})}(x) < \mathrm{M}\,\frac{1.2\ldots\mathfrak{m}}{\mathfrak{r}^{\mathfrak{m}}},$$

pour toute valeur de x de module r.

Une seconde application du même théorème à la série

$$f^{(\mathfrak{m})}(x) = \Sigma\, m(m-1)\ldots(m-\mathfrak{m}+1)\,a_m\, x^{m-\mathfrak{m}},$$

entière en x et admettant, comme (2), $\mathrm{R} > r$ pour rayon de convergence, conduira de l'inégalité précédente à

$$\operatorname{mod} a_m < \mathrm{M}\,\frac{1.2\ldots\mathfrak{m}}{m(m-1)\ldots(m-\mathfrak{m}+1)}\,\frac{1}{r^{m-\mathfrak{m}}\,\mathfrak{r}^{\mathfrak{m}}},$$

ou bien, ce qui est la même chose, à

$$\operatorname{mod}\left[\frac{m(m-1)\ldots(m-\mathfrak{m}+1)}{1.2\ldots\mathfrak{m}}\,a_m\, x^{m-\mathfrak{m}}\,\mathfrak{r}^{\mathfrak{m}}\right] < \mathrm{M},$$

pour tout système de valeur de x, $\mathfrak{r}$ ayant r, $\mathfrak{r}$ pour modules.

La série entière en x, $\mathfrak{r}$, dont le terme général est le monôme entre crochets, admet ainsi pour rayons de convergence r, $\mathfrak{r}$ (114) et même R, $\mathfrak{R}$, puisque r, $\mathfrak{r}$ sont des quantités positives quelconques inférieures à ces dernières (119); par suite (116, III), on peut, sans détruire sa convergence ni modifier sa somme. déplacer et grouper arbitrairement ses termes pour toutes valeurs de x, $\mathfrak{r}$ donnant

$$(6) \qquad \operatorname{mod} x < \mathrm{R}, \quad \operatorname{mod} \mathfrak{r} < \mathfrak{R}.$$

Or, en l'ordonnant par rapport à $\mathfrak{r}$, on obtient le développement (3); en groupant ensuite les termes de même degré m par rapport à x, $\mathfrak{r}$ indistinctement, on obtient la série entière en $x + \mathfrak{r}$

$$\Sigma a_m (x + \mathfrak{r})^m,$$

où, à cause des conditions (6), $x + \mathfrak{r}$ est une quantité quelconque de module inférieur à $\mathrm{R} + \mathfrak{R}$. La série (2) admet donc bien cette dernière quantité pour rayon de convergence et, comme elle a même somme que la série (3) d'après ce que nous venons de constater, elle fournit bien pour

$$\operatorname{mod} x < \mathrm{R} + \mathfrak{R}$$

le développement de $f(x)$ par la formule de Maclaurin. C'est ce que nous avions à prouver.

III. *Le développement* (2) *admet* $\Delta + \delta$ *pour rayon de convergence.*

Si l'on a $\delta \leqq \Delta$, on a aussi $\delta + \delta \leqq \Delta + \delta$, et dans l'alinéa précédent on peut prendre $\mathrm{R} = \delta$, $\mathfrak{R} = \delta$, parce que les séries (2), (3), entières l'une en x, l'autre en $\mathfrak{r}$, admettent δ, δ pour rayons de convergence. On en conclut que le développement (2) est valable pour $\operatorname{mod} x < \delta + \delta < 2\delta$.

Si l'on a encore $2\delta \leqq \Delta$, on étendra de même la validité de cette formule jusqu'à $\operatorname{mod} x < 2\delta + \delta < 3\delta$; et ainsi de suite jusqu'à $\operatorname{mod} x < k\delta + \delta$, aussi longtemps que $k\delta$ ne surpassera pas Δ. Il en résulte évidemment ce que nous voulions démontrer.

IV. Notre théorème est maintenant établi; car le développement de $f(x_0 + h, y_0 + k, \ldots)$ n'est pas autre chose que la série

de Maclaurin appliquée à $F(h, k, \ldots) = f(x_0 + h, y_0 + k, \ldots)$, fonction de $h, k, \ldots$ olotrope avec les olomètres $\delta_x, \delta_y, \ldots$ dans des aires auxquelles sont intérieurs les cercles décrits des origines $O_h, O_k, \ldots$ avec $\Delta_{x_0}, \Delta_{y_0}, \ldots$ pour rayons.

202. On peut évidemment spécifier les rayons de convergence maximums déterminés par le théorème précédent, en disant encore qu'*ils sont égaux aux plus courtes distances des points $x_0, y_0, \ldots$ aux contours des aires $S_x, S_y, \ldots$ accrues respectivement de zones additionnelles ayant pour épaisseurs les olomètres primitivement donnés $\delta_x, \delta_y, \ldots$.* Leur évaluation est ainsi ramenée à la simple délimitation des aires où la fonction considérée reste olotrope, *abstraction presque faite de la grandeur des olomètres qu'on peut lui assigner,* parce que les valeurs que les théories générales fournissent pour ceux-ci sont habituellement fort petites relativement à l'étendue des aires en question; or on verra qu'en général cette recherche indirecte est infiniment plus facile que ne le serait une évaluation directe.

On voit aussi par là, comme nous l'avions annoncé au n° 139, que *la grandeur des olomètres connus pour une fonction olotrope dans des aires déterminées est presque indifférente;* car les valeurs maximums des olomètres que le théorème précédent permet d'admettre en $x_0, y_0, \ldots$ ne dépendent absolument que de la configuration de ces aires légèrement accrues, et des positions que ces points y occupent relativement à leurs contours.

203. *Quand $f(x, y, \ldots)$ est olotrope dans toutes portions limitées d'aires données illimitées, elle l'est nécessairement dans ces dernières diminuées de zones offrant des épaisseurs aussi faibles qu'on voudra.* Car, où que $x_0, y_0, \ldots$ tombent à l'intérieur des aires ainsi réduites, les rayons de convergence maximums que le théorème du n° 201 permet d'assigner au développement de $f(x_0 + h, y_0 + k, \ldots)$ atteindront au moins les épaisseurs des zones en question.

204. La contre-partie de la réciprocité signalée au n° 143 entre la grandeur des aires et celle des olomètres admissibles est maintenant visible. Effectivement, si l'on diminue les aires $S_x, S_y, \ldots$ de zones intérieures d'épaisseurs $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \ldots$, les moindres distances

qui séparent les points intérieurs aux aires ainsi réduites S'_x, S'_y, ... des contours des aires proposées accrues de zones additionnelles ayant δ_x, δ_y, ..., pour épaisseurs croîtront de ε_x, ε_y, ... respectivement; par suite, en vertu de notre théorème, les olomètres de $f(x, y, \ldots)$ dans les nouvelles aires croîtront d'autant et pourront être portés à $\delta_x + \varepsilon_x$, $\delta_y + \varepsilon_y$, ...

205. Nous attirons l'attention du lecteur sur la différence considérable, au point de vue doctrinal, qui existe entre notre théorème et ceux qu'on énonce habituellement pour formuler les limites de convergence de la série de Taylor. Comme nous l'avons dit au n° 164, les auteurs de ces derniers cherchent à prouver qu'une fonction est développable de cette manière, si elle possède telles ou telles de ces propriétés vagues (continuité, etc.) sur lesquelles, tour à tour, on a essayé d'édifier la théorie des fonctions. Mais ceux qui prendront la peine d'examiner attentivement les raisonnements de cette espèce et qui, bien entendu, ne se contenteront pas d'une rigueur inférieure à celle qu'on exige dans les théories mathématiques courantes, reconnaîtront sans doute avec nous que tous pèchent tantôt par un point, tantôt par un autre, sans parler de ce qu'il y a d'artificiel dans les procédés qu'il a fallu imaginer pour les construire. Nous nous gardons bien de procéder de la sorte, *a priori,* convaincus qu'ON NE PARVIENDRA JAMAIS A DÉDUIRE LA POSSIBILITÉ DE CE DÉVELOPPEMENT, DE PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DES FONCTIONS QUI, DANS LEUR ENSEMBLE, SERAIENT PLUS SIMPLES QUE CETTE POSSIBILITÉ MÊME. Nous venons de prouver seulement que la possibilité en question, *si elle existe sous une certaine forme,* se *conserve* sous une autre, et il nous reste à établir celle de la première forme. Nous ferons cette démonstration progressivement, en la fondant sur les caractères précis des calculs et des fonctions données dans les diverses opérations analytiques qui conduisent à de nouvelles fonctions, et dont les principales vont être étudiées dans les Chapitres suivants. C'est une méthode toute différente; elle réussit parce que nous renonçons résolument à l'entreprise chimérique consistant *à vouloir démontrer tout sans s'appuyer sur rien.*

206. Le corollaire suivant est à retenir : *Quand la fonc-*

tion $f(x, y, \ldots)$ *est indéfiniment olotrope* (139), *le développement de* $f(x_0 + h, y_0 + k, \ldots)$ *converge quelles que soient, et les positions des valeurs initiales* x_0, y_0, ... *et les grandeurs des modules des accroissements* h, k, ... Par exemple, on peut, pour toutes valeurs de x, y, ..., développer de pareilles fonctions par la formule de Maclaurin, c'est-à-dire représenter chacune d'elles par une série entière unique en x, y, ..., ce qui fait naître entre elles et les polynômes entiers une similitude tout à fait remarquable.

En passant, le lecteur remarquera la conformité parfaite des conclusions de ce paragraphe avec les notions déjà acquises sur les polynômes entiers (150), les sommes de séries entières (140) et les monômes à exposants négatifs (151). Pour ces derniers, par exemple, les plus grands cercles de centres x_0, y_0, ... où ils conservent la propriété d'être olotropes, ont pour rayons les modules de ces valeurs initiales, et nous avions déjà trouvé directement que ces mêmes modules sont précisément les plus grands rayons de convergence des développements de ces fonctions en séries entières par rapport aux accroissements des variables.



CHAPITRE VIII.

CALCUL INVERSE DES DÉRIVÉES.

Intégration des différentielles totales.

207. Nous passons au problème inverse de la différentiation : *trouver toutes les fonctions qui ont des fonctions données des mêmes variables indépendantes, pour dérivées de tels et tels ordres donnés.* On peut le considérer comme un cas particulier très restreint du problème infiniment plus vaste de l'*intégration des équations différentielles,* que nous ne pourrons pas aborder avant le Chapitre X; mais la simplicité extrême des moyens à mettre en œuvre nous permet de le traiter dès à présent; son caractère spécial et son importance considérable justifient d'autre part la place que nous lui assignons ici.

Tout d'abord, nous devons observer généralement que *les fonctions données doivent être olotropes, et que la fonction inconnue ne peut être cherchée que parmi celles qui jouissent de cette propriété* [au moins localement (175, IV)]; dire, en effet, que des fonctions données doivent figurer parmi les dérivées de cette dernière, c'est dire avant tout *qu'elle a des dérivées;* or nos définitions (156, 158) n'en attribuent qu'aux fonctions olotropes, fonctions dont les dérivées le sont toutes aussi (165).

208. La plus simple et aussi la plus importante des questions de ce genre est celle où il s'agit de *trouver une fonction $u(x, y, \ldots)$ des h variables $x, y, \ldots,$ qui ait pour dérivées premières par rapport à $x, y, \ldots$ respectivement, les h fonctions données*

$$(1)\qquad U_x(x, y, \ldots),\quad U_y(x, y, \ldots),\quad \ldots.$$

En d'autres termes, *on veut satisfaire à la fois aux h équa-*

tions différentielles

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{du}{dx} = U_x(x, y, \ldots), \\ \dfrac{du}{dy} = U_y(x, y, \ldots), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

formant un système immédiat total à une seule fonction inconnue u n'entrant dans aucun de leurs seconds membres (Chap. X, *inf.*). La réponse est fournie par le théorème suivant ([1]).

Pour que le problème ait quelque solution localement olotrope (**175**, IV) *dans les aires*

$$(3)\quad S_x,\ S_y,\ \ldots,$$

avec les olomètres

$$(4)\quad \delta_x,\ \delta_y,\ \ldots,$$

il est nécessaire et suffisant que toutes les fonctions données (1) *jouissent de cette propriété, puis, quand h est* > 1, *qu'elles satisfassent en outre aux* $\frac{h(h-1)}{1.2}$ *identités de condition*

$$(5)\quad \ldots,\ \frac{dU_s}{dt} = \frac{dU_t}{ds},\ \ldots,$$

$\ldots, (s, t), \ldots$ *désignant les diverses combinaisons deux à deux des h variables* $x, y, \ldots$.

On peut de plus, en $x_0, y_0, \ldots$, *valeurs initiales des variables prises à volonté dans les aires* (3), *assigner une valeur initiale arbitraire* $u_{0,0,\ldots}$ *à la fonction inconnue; elle se trouve alors*

([1]) Le cheminement (171) est un élément indispensable du calcul de la fonction u, et dès lors il peut fort bien arriver que la propriété pour les fonctions données (1) d'être toutes olotropes *à proprement parler* dans certaines aires n'entraîne pour elle, quand ces dernières ne sont pas toutes imperforées, que celle d'y être *localement* olotrope, par suite non nécessairement monodrome. L'énoncé qui va suivre et tous ceux du même genre perdraient donc une partie de leur généralité sans aucune compensation, si nous voulions encore les formuler pour le cas seulement où, dans les aires considérées, les fonctions données seraient toutes olotropes à proprement parler.

complètement déterminée, et son développement en série entière par rapport aux différences $(x - x_0)$, $(y - y_0)$, ... *se déduit immédiatement des développements analogues des fonctions* (1).

I. Si la fonction $u(x, y, \ldots)$ existe, localement olotrope dans les aires (3) avec les olomètres (4), toutes ses dérivées jouissent évidemment de la même propriété (165), en particulier celles du premier ordre qui reproduisent les fonctions (1).

En représentant ensuite par

$$u(x, y, \ldots) = \Sigma[u_{m,n,\ldots}(x - x_0)^m (y - y_0)^n \ldots] \tag{6}$$

le développement de cette fonction par la formule de Taylor à partir de $x_0, y_0, \ldots$ et par

$$\left\{\begin{array}{l} U_x(x, y, \ldots) = \Sigma[a_{m,n,\ldots}(x - x_0)^m (y - y_0)^n \ldots], \\ U_y(x, y, \ldots) = \Sigma[b_{m,n,\ldots}(x - x_0)^m (y - y_0)^n \ldots], \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right. \tag{7}$$

ceux des fonctions données (1) construits à partir des mêmes valeurs initiales tombant, bien entendu, dans les aires (3), la réalisation des identités (2) exige que pour chaque combinaison de valeurs des indices m, n, ... on ait le groupe d'égalités

$$\left\{\begin{array}{l} m u_{m,n,\ldots} = a_{m-1,n,\ldots}, \\ n u_{m,n,\ldots} = b_{m,n-1,\ldots}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right. \tag{8}$$

en nombre égal à celui des entiers m, n, ... qui ne sont pas nuls (157, 3°), (137); d'où l'on tire immédiatement la suite indéfinie de groupes d'égalités de conditions

$$\left\{\begin{array}{l} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{a_{m-1,n,\ldots}}{m} = \dfrac{b_{m,n-1,\ldots}}{n} = \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right. \tag{9}$$

Mais, comme on a (162)

$$a_{m-1,n,p,q,\ldots} = \frac{U_x^{(m-1,n,p,q,\ldots)}(x_0, y_0, \ldots)}{(m-1)!\,n!\,p!\,q!\ldots},$$

$$b_{m,n-1,p,q,\ldots} = \frac{U_y^{(m,n-1,p,q,\ldots)}(x_0, y_0, \ldots)}{m!\,(n-1)!\,p!\,q!\ldots},$$

la condition mise ci-dessus en évidence donne

$$U_x^{(m-1,n,p,q,\dots)}(x_0, y_0, \dots) = U_y^{(m,n-1,p,q,\dots)}(x_0, y_0, \dots),$$

c'est-à-dire

$$\frac{d^{(m-1)+(n-1)+p+q+\dots}}{dx^{m-1}\,dy^{n-1}\,dz^p\,ds^q\dots}\left(\frac{dU_x}{dy}\right) = \frac{d^{(m-1)+(n-1)+p+q+\dots}}{dx^{m-1}\,dy^{n-1}\,dz^p\,ds^q\dots}\left(\frac{dU_y}{dx}\right)$$

pour

$$x = x_0, \qquad y = y_0, \qquad z = z_0, \qquad s = s_0, \qquad \dots .$$

Il faut, en d'autres termes, qu'il y ait égalité numérique entre les valeurs initiales des fonctions $\frac{dU_x}{dy}$, $\frac{dU_y}{dx}$ et de toutes leurs dérivées semblables; il faut, par suite (177, II), qu'on ait identiquement

$$\frac{dU_x}{dy} = \frac{dU_y}{dx}$$

et de même toutes les autres identités (5).

On aperçoit, *a priori*, la nécessité de ces identités en remarquant que, si la fonction inconnue u existe, les deux membres de celle écrite en évidence représentent, l'un

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{du}{ds}\right) = \frac{d^2u}{dt\,ds},$$

l'autre

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{du}{dt}\right) = \frac{d^2u}{ds\,dt} = \frac{d^2u}{dt\,ds}.$$

II. En supposant maintenant remplies toutes les conditions posées, les identités (5) entraînent évidemment les égalités (9); il en résulte que les équations de condition (8), qui sont toutes linéaires, fournissent non seulement sans ambiguïté, mais encore sans contradiction, les seules valeurs admissibles pour les coefficients inconnus $u_{m,n,\dots}$ du développement (6), à l'exception toutefois du premier $u_{0,0,\dots}$, à indices tous nuls, qui ne figure dans aucune de ces équations. On peut donc choisir celui-ci arbitrairement; en adoptant ensuite pour les autres les valeurs fournies par la résolution de ces équations

$$(10) \qquad u_{m,n,\dots} = \frac{a_{m-1,n,\dots}}{m} = \frac{b_{m,n-1,\dots}}{n} = \dots,$$

on obtient une série dont les rayons de convergence sont au moins égaux aux quantités (4); car, en vertu de ces formules, tout système de valeurs de $x, y, \ldots$ rendant

$$\operatorname{mod}(x-x_0),\quad \operatorname{mod}(y-y_0),\quad \ldots$$

inférieurs à ces quantités, rendra le module de son terme général inférieur au plus grand de ceux des produits obtenus en multipliant par $(x-x_0)$, $(y-y_0)$, ... les termes des développements (7) où les indices ont respectivement les combinaisons de valeurs

$$(m-1, n, \ldots),\quad (m, n-1, \ldots),\quad \ldots,$$

produits qui sont tous infiniment petits.

D'ailleurs, et à cause des égalités (8), la somme de cette série jouit évidemment des propriétés voulues qu'expriment les identités (2).

III. Il est visible enfin que, si l'on chemine arbitrairement dans les aires (3) (**171**), les coefficients du développement fait à partir de $x = x_i, y = y_i, \ldots$ de la pseudo-fonction qui a (6) pour premier développement sont égaux, le premier à la valeur acquise en $x_i, y_i, \ldots$ par cette pseudo-fonction elle-même, les autres à celles qu'on trouverait pour $\ldots, u_{m,n,\ldots}, \ldots$ en substituant x_i, $y_i, \ldots$ à $x_0, y_0, \ldots$ dans les calculs de l'alinéa précédent. Cette remarque complète notre démonstration, en montrant que les olomètres de la fonction $u(x, y, \ldots)$ conservent les valeurs (4) dans toute l'étendue des aires (3).

209. Il faut y ajouter les observations ci-après.

I. Quand les identités (5) ont toutes lieu, les fonctions (1) sont certainement ensemble les dérivées premières de quelque même fonction de $x, y, \ldots$; ou bien, en d'autres termes, l'expression

$$\text{(11)}\qquad U_x dx + U_y dy + \ldots$$

est la différentielle totale première (**167**) d'une certaine fonction, ce qui n'a pas lieu si U_x, U_y, ... ont été prises au hasard. On exprime habituellement ce fait en disant que l'expression (11) est une *différentielle exacte,* et l'on nomme *intégration* de cette

différentielle [ou des équations (2)] l'opération inverse de la différentiation, qui consiste à remonter à la fonction à laquelle cette différentielle appartient [ou bien qui satisfait aux équations (2)].

Par suite, les identités (5) auxquelles les fonctions données U_x, ... doivent avant tout satisfaire se nomment les *conditions d'intégrabilité* de cette différentielle [ou des équations (2)].

Le mot *intégration* a deux sens bien différents qu'il ne faut pas confondre. Tantôt il s'applique aux calculs exécutés dans le numéro précédent pour remonter au développement de la fonction demandée, suivis des recherches à faire pour la classer et en découvrir les propriétés essentielles quand elles sont inconnues; cette opération est au nombre des plus importantes de l'Analyse et constitue une source inépuisable de nouvelles fonctions, de celles en particulier que nous aurons à étudier dans notre deuxième Partie. Tantôt il s'applique *aux procédés divers à l'aide desquels on peut exprimer la fonction obtenue, au moyen de fonctions déjà connues* quand la chose est possible; c'est un problème tout autre dont le sort dépend des progrès réalisés dans la monographie des fonctions, au moment où on se le pose. Dans les cas classiques, ce rôle de fonctions connues est joué, à peu près exclusivement, par les fonctions rationnelles, les irrationnelles algébriques et les transcendantes logarithmiques, exponentielles et circulaires; nous les traiterons au commencement de notre troisième Partie.

II. On nomme *intégrale* de la différentielle (11), quelquefois des fonctions (1) ou bien encore des équations (2), toute fonction à laquelle cette différentielle appartient, ou bien ayant les fonctions données (1) pour dérivées premières.

Comme d'après les formules (10) tous les coefficients du développement d'une intégrale, sauf le premier, ne dépendent nullement de celui-ci, mais seulement de ceux des développements des fonctions données U_x, ... qui les déterminent entièrement, *la différence de deux intégrales se réduit à celle des premiers termes de leurs développements, c'est-à-dire à une quantité constante*. Inversement, *toute intégrale en donne une autre quand on lui ajoute une quantité constante, d'ailleurs arbitraire*.

Il en résulte que, *si l'on connaît une seule intégrale* $u(x, y, \ldots)$,

toutes les autres sont données par la formule

$$(12) \qquad u(x, y, \ldots) = {}'u(x, y, \ldots) + C,$$

où C *représente au fond une nouvelle variable, indépendante de* $x, y, \ldots$.

III. L'expression ci-dessus (12) est l'intégrale *indéfinie* de la différentielle (11), ou bien l'intégrale *générale* des équations (2), et se représente par le signe

$$\int (U_x dx + U_y dy + \ldots),$$

dont on se sert quelquefois pour noter une intégrale déterminée de la même différentielle ou *détermination particulière* de l'intégrale indéfinie; cette dernière s'écrit alors

$$(13) \qquad \int (U_x dx + U_y dy + \ldots) + C.$$

Ces notations rappellent la propriété sommatoire des intégrales que nous ferons connaître plus loin (**235**, *inf.*); elles n'en sont pas moins de qualité médiocre à cause des signes parasites dx, dy, ... dont elles sont compliquées; d'ailleurs la propriété dont il s'agit est d'une importance théorique à peu près nulle; mais leur usage est tellement enraciné, que nous ne pouvons songer à en employer d'autres.

IV. Dans les expressions (12), (13), la quantité C se nomme la *constante arbitraire,* parce qu'elle est effectivement constante *relativement aux variables* $x, y, \ldots$, et que sa valeur est absolument indéterminée. En lui attribuant successivement toutes les valeurs possibles, on forme toutes les déterminations particulières de l'intégrale indéfinie. On obtient, par exemple, celle qui prend la valeur initiale $u_{0,0,\ldots}$ pour $x = x_0$, $y = y_0$, ..., en satisfaisant à la condition numérique

$$u_{0,0,\ldots} = {}'u(x_0, y_0, \ldots) + C,$$

c'est-à-dire en prenant

$$C = u_{0,0,\ldots} - {}'u(x_0, y_0, \ldots),$$

d'où, pour la détermination dont il s'agit,

$$u(x, y, \ldots) = {}'u(x, y, \ldots) - {}'u(x_0, y_0, \ldots) + u_{0,0,\ldots}$$

V. Ici se place une première application de l'observation générale faite au n° **175** (I). Si le cheminement seul peut faire connaître la valeur même $u(x_i, y_i, \ldots)$ que prend en $x_i, y_i, \ldots$ une détermination donnée $u(x, y, \ldots)$ de l'intégrale indéfinie (13), il n'est pas indispensable au calcul des autres coefficients du développement de $u(x, y, \ldots)$ à partir de $x_i, y_i, \ldots$.

Nous avons déjà remarqué incidemment (**208**, III) que ce nouveau développement peut être tiré de ceux analogues des fonctions (1), en procédant exactement comme pour obtenir le *premier* développement à partir de $x_0, y_0, \ldots$, à cela près que pour u_i, nouvelle valeur initiale de $u(x, y, \ldots)$, il faut prendre $u(x_i, y_i, \ldots)$ calculée par cheminement.

VI. Quand les aires (3) sont imperforées, cas auquel les fonctions données (1) y sont monodromes et, par suite, olotropes dans le vrai sens de ce mot (**173**), *l'intégrale indéfinie y jouit certainement de la même propriété.*

VII. Remarquons enfin que *l'intégrale indéfinie cesse nécessairement d'être olotrope, quand quelqu'une des fonctions données* (1) *cesse elle-même de l'être.* Car, si l'intégrale restait alors olotrope, ses dérivées premières le seraient toutes aussi, contrairement à l'hypothèse (**165**).

En d'autres termes, *les phases singulières d'une intégrale indéfinie sont fournies a priori par celles des fonctions intégrées,* fait particulier conforme à ce que nous avons annoncé depuis longtemps en termes généraux (**138**).

210. On a démontré que *les conditions d'intégrabilité* (5) *ne sont pas indépendantes les unes des autres,* c'est-à-dire que la réalisation d'une certaine partie seulement d'entre elles entraîne celle de toutes les autres. Mais les résultats de cette discussion nous sont inutiles.

Elles sont évidemment satisfaites, quand chacune des fonctions données (1) *dépend exclusivement de la variable qui lui sert d'indice,* car alors tous leurs membres se réduisent identiquement à 0. Ce cas d'intégrabilité est fort intéressant, et on le spécifie en disant que dans la différentielle (11) *les variables sont séparées.*

211. La méthode suivie au n° **208** s'applique presque textuellement à la solution de cette question un peu plus générale.

Trouver une fonction $u(x, y, \ldots)$ qui ait pour diverses dérivées d'un même ordre total K *autant de fonctions données des h variables $x, y, \ldots$.*

$$(14)\qquad \ldots,\quad U_{p,q,\ldots}(x, y, \ldots),\quad \ldots,\quad (p+q+\ldots=K),$$

c'est-à-dire qui satisfasse aux équations différentielles simultanées d'ordre commun K,

$$(15)\qquad \left\{\begin{array}{l} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{d^{p+q+\ldots}u}{dx^p\,dy^q\ldots} = U_{p,q,\ldots}(x, y, \ldots), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

Le sujet est si facile, que nous nous contenterons d'indiquer les principales conclusions auxquelles conduit son étude.

I. En supposant, bien entendu, toutes les fonctions données (14) olotropes (au moins localement) dans les aires (3) et avec les olomètres (4), et les développant à partir d'un même système de valeurs initiales des variables $x_0, y_0, \ldots$, l'identification de ces séries avec le développement semblable de la fonction cherchée, conduit à une suite indéfinie de groupes d'équations de condition toutes linéaires par rapport aux coefficients inconnus de ce dernier développement.

Ces équations ne contiennent pas ceux de ces coefficients dont les indices donnent des sommes inférieures à K *et qui, par suite, demeurent entièrement arbitraires;* mais elles fournissent les valeurs de chacun des autres, cela d'une seule manière quand $h=1$, mais habituellement de *plusieurs* quand h est >1.

Dans ce dernier cas, la concordance numérique constante des divers résultats dépend de la satisfaction des identités préalables, ou *conditions d'intégrabilité,*

$$\ldots,\quad \frac{dU_{P,Q-1,\ldots}}{dy} = \frac{dU_{P-1,Q,\ldots}}{dx} = \ldots,\qquad (P+Q+\ldots=K+1),$$

dont la nécessité est d'ailleurs visible *a priori.*

II. Quand ces conditions sont remplies, l'identification devient

possible et fournit pour la fonction inconnue un premier développement ayant des rayons de convergence au moins égaux aux quantités (4).

III. De ce premier développement on peut déduire les subséquents, en calculant les valeurs de la fonction inconnue et de ses dérivées d'ordres totaux inférieurs à K par cheminement, mais celles de ses autres dérivées par de nouvelles identifications analogues à celle faite ci-dessus en $x_0, y_0, \ldots$. On voit ainsi que *toute détermination* de la fonction inconnue est localement olotrope aussi longtemps que les fonctions données (14) le sont elles-mêmes.

IV. *La solution la plus générale du problème s'obtient en ajoutant à une solution particulière choisie à volonté un polynôme entier de degré* $K-1$, *en* $x, y, \ldots$, *ayant pour coefficients des constantes arbitraires* (**209**, IV).

Son expression est ainsi une fonction, tant des variables primitives $x, y, \ldots$ que des nouvelles variables constituées par les constantes arbitraires, mais essentiellement linéaire par rapport à ces dernières. On peut aussi la nommer l'*intégrale indéfinie* de la différentielle totale *exacte* d'ordre K

$$(16) \qquad \Sigma[U_{p,q,\ldots}(x, y, \ldots)dx^p dy^q \ldots], \qquad (p+q+\ldots = K).$$

C'est l'*intégrale générale* des équations différentielles (15).

On la note quelquefois elle-même, ou quelqu'une de ses déterminations particulières, en faisant précéder par K signes $\int$ la notation de la différentielle.

V. Pour la cause indiquée au n° **209** (VII), *chaque détermination de cette intégrale indéfinie cesse d'être olotrope aussitôt que quelqu'une des fonctions* (14) *entre dans une phase singulière.*

212. De même qu'une différentiation d'ordre quelconque peut être décomposée en différentiations du premier ordre superposées, *l'intégration de la différentielle totale* (16) *d'ordre* K *peut se résoudre en des intégrations réitérées de différentielles premières.* Il y a habituellement avantage à voir les choses de cette

manière, et quelques mots suffiront pour montrer comment elles se passent.

Soit, pour fixer les idées, à calculer

$$u(x, y) = \int\int\int [U_{3,0} dx^3 + U_{2,1} dx^2 dy + U_{1,2} dx\, dy^2 + U_{0,3} dy^3],$$

avec les conditions d'intégrabilité

$$(17) \qquad \frac{dU_{3,0}}{dy} = \frac{dU_{2,1}}{dx}, \qquad \frac{dU_{2,1}}{dy} = \frac{dU_{1,2}}{dx}, \qquad \frac{dU_{1,2}}{dy} = \frac{dU_{0,3}}{dx},$$

et nommons $u_{2,0}$, $u_{1,1}$, $u_{0,2}$ les dérivées secondes de la fonction cherchée u.

A cause des relations évidentes

$$\frac{du_{2,0}}{dx} = U_{3,0},$$
$$\frac{du_{2,0}}{dy} = U_{2,1}$$

et de la première condition d'intégrabilité, la différentielle première

$$U_{3,0}\, dx + U_{2,1}\, dy$$

est exacte, et l'on a

$$u_{2,0} = \int [U_{3,0}\, dx + U_{2,1}\, dy] = U_{2,0} + C_{2,0},$$

$U_{2,0}$ désignant quelque détermination particulière de cette intégrale indéfinie et $C_{2,0}$ une constante arbitraire. En appelant de même $C_{1,1}$, $C_{0,2}$ d'autres constantes arbitraires et $U_{1,1}$, $U_{0,2}$ des déterminations particulières des intégrales indéfinies des différentielles

$$U_{2,1}\, dx + U_{1,2}\, dy, \quad U_{1,2}\, dx + U_{0,3}\, dy,$$

qui sont exactes comme la précédente à cause des deux dernières conditions (17), il vient aussi

$$u_{1,1} = U_{1,1} + C_{1,1}, \qquad u_{0,2} = U_{0,2} + C_{0,2}.$$

Cette opération ascendante, poursuivie avec des notations analogues et dans des conditions de possibilité qui sont évidentes, conduit successivement à

$$u_{1,0} = \int [u_{2,0}\, dx + u_{1,1}\, dy] = U_{1,0} + \frac{C_{2,0}}{1} x + \frac{C_{1,1}}{1} y + C_{1,0},$$
$$u_{0,1} = \int [u_{1,1}\, dx + u_{0,2}\, dy] = U_{0,1} + \frac{C_{1,1}}{1} x + \frac{C_{0,2}}{1} y + C_{0,1},$$

puis finalement à

$$u = \int [u_{1,0}\,dx + u_{0,1}\,dy]$$
$$= U_{0,0} + \frac{C_{2,0}}{1.2}x^2 + \frac{C_{1,1}}{1.1}xy + \frac{C_{0,2}}{1.2}y^2 + \frac{C_{1,0}}{1}x + \frac{C_{0,1}}{1}y + C_{0,0},$$

en appliquant les règles évidentes de l'intégration des polynômes entiers (**215**, IV, *inf.*).

213. Dès les premières définitions (**155**) (**165**), nous savons que les dérivées d'une fonction demeurent olotropes aussi longtemps que celle-ci. Nous pouvons maintenant compléter cette remarque par cette autre : *Quand la fonction cesse d'être olotrope, elle a certainement dans chaque ordre une dérivée au moins qui entre en même temps dans une phase singulière.* Car si dans l'ordre K les dérivées restaient toutes olotropes, la fonction, considérée comme une détermination particulière de l'intégrale indéfinie de sa différentielle totale d'ordre K, ne pourrait manquer d'être aussi olotrope (**211**, III), ce qui est contraire à l'hypothèse.

214. Pour chaque développement de l'intégrale, on peut supposer, dans tout ce qui précède, que les notations (4) représentent les plus grands rayons de convergence communs à tous les développements des fonctions données construits à partir des mêmes valeurs initiales de $x, y, \ldots$. *Ces plus grands rayons donnent donc les valeurs maximums des rayons de convergence du développement de l'intégrale;* car, si celui-ci en possédait de plus grands, ils appartiendraient à ceux de toutes ses dérivées (**155**) (**165**), en particulier à ceux des fonctions données (14).

On remarquera la concordance parfaite de cette conclusion avec le théorème général du n° **201**, d'où nous aurions même pu la déduire immédiatement. Elle s'étend sans plus de difficulté à toutes les opérations analogues que nous traiterons encore dans ce Chapitre, et nous nous dispenserons de la reproduire à nouveau pour chacune.

215. Quand h, nombre des variables indépendantes, se réduit à 1, aucune condition d'intégrabilité n'intervient plus et l'on peut dire en gros que *toute fonction olotrope d'une seule variable*

est la dérivée de tel ordre qu'on voudra de quelque autre fonction olotrope de la même variable.

Ce cas particulier, déjà remarquable par sa simplicité et cette absence de toute restriction, l'est bien davantage par cette circonstance que tous les autres peuvent y être ramenés (**220**, *inf.*), et c'est sur lui que se formulent la plupart des règles de l'intégration. Voici ce que nous pouvons en dire actuellement.

I. En représentant par

$$U(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \ldots + a_m(x - x_0)^m + \ldots$$

le développement de la fonction à intégrer, on trouve immédiatement (**208**)

$$\int U(x)\,dx = C + \frac{a_0}{1}(x - x_0) + \frac{a_1}{2}(x - x_0)^2 + \ldots$$
$$+ \frac{a_m}{m+1}(x - x_0)^{m+1} + \ldots,$$

puis (**211**) (**212**)

$$\int\int U(x)\,dx^2 = C_0 + C_1(x - x_0) + \frac{a_0}{1.2}(x - x_0)^2 + \ldots$$
$$+ \frac{a_m}{(m+1)(m+2)}(x - x_0)^{m+2} - \ldots,$$

. . . .

où C, C_0, C_1, ... sont des constantes arbitraires.

Comme chaque intégration multiplie par un facteur infiniment petit le coefficient du terme général du développement, la convergence de la série devient de plus en plus rapide; il arrive même fréquemment que des valeurs de x (situées sur le cercle commun de convergence) font à la fois diverger les développements de la fonction et de ses premières intégrales, converger au contraire ceux des intégrales subséquentes.

II. *Si, en appelant* a_1, a_2, ..., a_g *des constantes quelconques, on a identiquement*

$$U(x) = a_1 U_1(x) + a_2 U_2(x) + \ldots + a_g U_g(x), \tag{18}$$

on aura pareillement

$$\int U(x)\,dx = a_1 \int U_1(x)\,dx + \ldots + a_g \int U_g(x)\,dx.$$

C'est ce que rendent évident, soit le développement simultané

des deux membres de cette formule fait comme ci-dessus (I) en tenant compte de la relation (18), soit ce simple fait que les dérivées de ces deux membres sont identiquement égales (**166**) à cause de cette même relation.

En particulier, si le nombre des constantes et des fonctions simples se réduit à 1, il reste

$$\int a\,\mathrm{U}(x)\,dx = a\int \mathrm{U}(x)\,dx.$$

On peut ainsi faire sortir tout facteur constant de dessous le signe d'intégration.

Si les constantes considérées se réduisent les unes à $+1$, les autres à -1, il vient

$$(19)\qquad \begin{cases} \int[\pm \mathrm{U}_1(x) \pm \mathrm{U}_2(x) \pm \ldots]\,dx \\ \quad = \pm\int \mathrm{U}_1(x)\,dx \pm \int \mathrm{U}_2(x)\,dx \pm \ldots. \end{cases}$$

Cette transformation se nomme l'*intégration par décomposition*.

Dans ces diverses formules, nous ne mettons en évidence aucune constante arbitraire, parce que chaque intégrale indéfinie en contient une virtuellement. Elles ne veulent pas dire qu'une détermination quelconque du premier membre est égale à une quelconque du second; elles signifient simplement que *l'ensemble des fonctions de x contenues dans le premier membre se confond avec celui des fonctions contenues dans le second.* Ces deux observations sont applicables à toutes les formules contenant des intégrales indéfinies.

III. La *pratique* du calcul des intégrales indéfinies consiste à les exprimer au moyen de fonctions déjà connues chaque fois qu'on le peut. Elle exige avant tout qu'on ait assez bien fixé dans sa mémoire les dérivées des fonctions connues les plus simples, pour pouvoir les reconnaître quand elles viennent à se représenter comme fonctions à intégrer et écrire immédiatement leurs intégrales. Cette opération empirique se nomme l'*intégration à vue*.

La seule que nous puissions exécuter actuellement est celle où la fonction placée sous le signe d'intégration est un monôme x^{μ} dont l'exposant μ est un entier positif ou négatif, mais non $= -1$.

On trouve alors (**157**, 2°) (**209**, II)

$$\int x^{\mu}\,dx = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C, \tag{20}$$

formule qu'on obtiendrait encore en développant x^{μ} par la formule de Taylor et opérant comme dans l'alinéa I.

Le cas de $\mu = -1$ conduit à une transcendante, le *logarithme népérien,* que nous ne connaissons pas encore.

IV. Quand aucun des entiers $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_g$ n'est égal à -1, la combinaison de la formule (20) avec les règles de l'alinéa II conduit à la formule plus générale

$$\int (a_1 x^{\mu_1} + \ldots + a_g x^{\mu_g})\,dx = \frac{a_1}{\mu_1+1}\,x^{\mu_1+1} + \ldots + \frac{a_g}{\mu_g+1}\,x^{\mu_g+1} + C$$

qui opère en particulier l'intégration immédiate d'un polynôme entier.

Nous exposerons ailleurs (**270**, **333**, *inf.*) les autres règles usuelles de l'intégration pratique.

216. Dès à présent, nous attirons toute l'attention du lecteur sur la méthode que nous avons employée pour la première fois aux n^{os} **208**, **211**, parce que nous n'en appliquerons presque pas d'autre dans les Chapitres suivants, où nous aurons à traiter les questions les plus importantes de l'Analyse infinitésimale.

Elle consiste essentiellement, quand il s'agit de découvrir quelque fonction olotrope inconnue, à admettre provisoirement son existence, à calculer ensuite d'après cette hypothèse et au moyen des conditions que la nature du problème lui impose, les seules valeurs numériques admissibles pour les coefficients de son développement, à prouver ensuite que la série ainsi obtenue possède quelque système de rayons de convergence tous différents de zéro (c'est habituellement la partie la plus difficile de l'opération), à vérifier enfin après coup que la somme de cette série remplit effectivement les conditions voulues.

Cette méthode n'est donc pas autre chose que celle connue dès les premiers éléments sous le nom de *Méthode des coefficients indéterminés* et qui rend tant de services dans les circonstances les plus nombreuses et les plus variées. Elle en diffère cependant

en ce que les équations à résoudre pour calculer les valeurs des coefficients inconnus sont comme eux en nombre illimité, en ce que ce sont des séries qui fournissent la solution du problème et qu'il y a ainsi à se préoccuper de leur convergence.

Intégration des différentielles incomplètes.

217. Sous ce titre, nous comprenons tous les problèmes particuliers du calcul inverse des dérivées qui ne rentrent pas dans les deux cas auxquels nous avons consacré le paragraphe précédent. Voici le plus intéressant d'entre eux :

Trouver une fonction $u(x, y, \ldots, x', y', \ldots)$ des h variables $x, y, \ldots$ et des h' autres variables $x', y', \ldots$ qui ait pour dérivées premières par rapport à celles du premier groupe les h fonctions données

$$(1) \qquad U_x(x, y, \ldots, x', y', \ldots), \quad U_y(x, y, \ldots, x', y', \ldots), \quad \ldots.$$

Nous distinguerons les rôles bien différents que les diverses variables jouent dans la question, en appelant *principales* celles du premier groupe $x, y, \ldots$ et *paramétriques* celles du second $x', y', \ldots$. *D'après cela, il s'agit de faire naître à la fois les identités*

$$(2) \qquad \begin{cases} \dfrac{du}{dx} = U_x(x, y, \ldots, x', y', \ldots), \\ \dfrac{du}{dy} = U_y(x, y, \ldots, x', y', \ldots), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

équations différentielles formant un système immédiat partiel aux h variables principales $x, y, \ldots$, aux h' variables paramétriques $x', y', \ldots$, et à la fonction inconnue unique u n'entrant dans aucun de leurs seconds membres, ni par elle-même, ni par ses dérivées (Chap. XII, *inf.*).

I. Le développement de la fonction inconnue en une série entière par rapport aux $h + h'$ différences $(x - x_0), (y - y_0), \ldots, (x' - x'_0), (y' - y'_0), \ldots$ suivi de l'identification de ses dérivées premières par rapport aux variables principales $x, y, \ldots$ avec

les développements semblables des fonctions données (1), fournira encore une suite illimitée d'équations linéaires à résoudre pour avoir ses coefficients $\ldots, u_{m,n,\ldots,m',n',\ldots}, \ldots$.

Aucune de ces équations ne contient les coefficients

$$(3) \qquad \ldots, \quad u_{0,0,\ldots,m',n',\ldots}, \quad \ldots$$

dont tous les indices *principaux* m, n, ... se réduisent à zéro et par suite ils restent absolument indéterminés.

Mais, pour chacun des autres, les mêmes équations fournissent une valeur soit unique, quand h, nombre des variables, se réduit à 1, soit multiple (habituellement) quand h est > 1.

Dans ce dernier cas, la concordance de ces valeurs multiples doit être assurée par les $\frac{h(h-1)}{1.2}$ *conditions d'intégrabilité* préalables

$$(4) \qquad \ldots, \quad \frac{dU_s}{dt} = \frac{dU_t}{ds}, \quad \ldots,$$

où $\ldots, (s, t), \ldots$ sont les diverses combinaisons deux à deux des h variables principales $x, y, \ldots$, et dont la nécessité s'aperçoit *a priori* comme pour celles trouvées dans le paragraphe précédent.

II. En les supposant satisfaites, et en attribuant : premièrement aux coefficients (3) des valeurs arbitraires, mais cependant *de nature à faire de la série partielle, en* $(x'-x'_0)$, $(y'-y'_0)$, ... *seulement, formée par les termes du développement de* $u(x, y, \ldots, x', y', \ldots)$ *auxquels ils appartiennent, le premier développement d'une fonction des variables paramétriques* $u_{0,0,\ldots}(x', y', \ldots)$ *olotrope (au moins localement) dans les aires où les fonctions données* (1) *sont supposées l'être et avec les mêmes olomètres,* deuxièmement aux autres coefficients, les valeurs calculées ci-dessus sans ambiguïté et sans contradiction, puis, en raisonnant comme dans le paragraphe précédent, on trouve sans difficulté que *la série entière en* $(x-x_0)$, $(y-y_0)$, ..., $(x'-x'_0)$, $(y'-y'_0)$, ... *ainsi obtenue est le premier développement d'une fonction des* $h+h'$ *variables de la question, qui est localement olotrope dans les mêmes aires et avec les mêmes olomètres que les fonctions données* (1) *et la fonction* $u_{0,0,\ldots}(x', y', \ldots)$; on trouve enfin qu'*elle donne bien lieu aux identités voulues* (2).

III. On exprime encore que les conditions d'intégrabilité (4) sont satisfaites, en disant que *la différentielle totale*

$$U_x(x, y, \ldots, x', y', \ldots)dx + U_y(x, y, \ldots, x', y', \ldots)dy + \ldots$$

aux h variables principales $x, y, \ldots$, aux h' variables paramétriques $x', y', \ldots$, est exacte.

On appelle aussi *intégrale indéfinie* de cette différentielle et l'on représente par

$$(5) \qquad \int [U_x dx + U_y dy + \ldots]$$

l'expression générale des fonctions olotropes, tant des variables paramétriques que des variables principales, qui donnent lieu aux identités (2). C'est l'*intégrale générale* des équations (2).

Dans le développement de la fonction u, la somme des termes qui ont les quantités (3) pour coefficients est une fonction *arbitraire* des variables paramétriques $x', y', \ldots$, tandis que celle des autres termes est une fonction de $x, y, \ldots, x', y', \ldots$ qui dépend seulement de la nature des fonctions données (1) et nullement de ces quantités. Il en résulte que *la différence de deux déterminations de l'intégrale indéfinie* (5) *se réduit toujours à quelque fonction des variables paramétriques $x', y', \ldots$ seulement,* et par suite qu'*on obtient une expression de cette intégrale indéfinie, en faisant la somme*

$$'u(x, y, \ldots, x', y', \ldots) + c(x', y', \ldots)$$

de l'une de ses déterminations particulières $'u(x, y, \ldots, x', y', \ldots)$ choisie à volonté et d'une fonction arbitraire $c(x', y', \ldots)$ des variables paramétriques.

IV. On peut dire en gros que les calculs *courants* ne sont pas compliqués sensiblement par cette présence de variables paramétriques dans l'intégrale (5), dont nous venons d'analyser les effets.

218. On arrive à des conclusions analogues, en supposant que, dans la différentielle totale d'ordre supérieur K du n° **211**, les fonctions $U_{p,q,\ldots}$ dépendent aussi des variables paramétriques x', y', ... Il est évident, par exemple, que son intégrale indéfinie s'obtient en ajoutant à quelque détermination particulière un

polynôme entier de degré K — 1 par rapport aux variables principales $x, y, \ldots$, dont les coefficients sont des fonctions arbitraires des variables paramétriques $x', y', \ldots$.

219. Une certaine décomposition d'une différentielle quelconque, accompagnée de la transformation temporaire d'une partie de ses variables principales en variables paramétriques, permet d'opérer dans son intégration un fractionnement que nous allons expliquer pour le premier ordre seulement.

Soit donc à intégrer la différentielle totale (11) du n° **209** que nous supposerons exacte, puis, pour fixer les idées, ne dépendre que des quatre variables x, y, z, t; posons

$$u = \int [U_x dx + U_y dy + U_z dz + U_t dt],$$

et considérons l'ensemble de quelques termes seulement de la différentielle, les deux premiers par exemple

$$U_x dx + U_y dy.$$

Cette expression est une différentielle totale aux deux variables principales x, y, aux deux variables paramétriques z, t, qui est exacte à cause de l'identité

$$\frac{dU_x}{dy} = \frac{dU_y}{dx},$$

l'une des conditions d'intégrabilité de la différentielle proposée. La fonction inconnue u est donc comprise dans l'intégrale indéfinie

$$\int [U_x dx + U_y dy],$$

puisque celle-ci renferme toutes les fonctions de x, y, z, t ayant U_x, U_y pour dérivées premières par rapport à x, y, c'est-à-dire de la forme

$$F(x, y, z, t) + c(z, t), \tag{6}$$

F désignant quelque détermination particulière de cette dernière intégrale et $c(z, t)$ une fonction inconnue de z, t seulement y jouant le rôle de variables paramétriques, fonction qu'il faut maintenant choisir de manière que l'expression (6) ait aussi U_z, U_t pour dérivées premières par rapport à z, t.

On y réussira évidemment en assujettissant la fonction $c(z, t)$ à satisfaire aux équations différentielles

$$\frac{dc}{dz} = U_z(x, y, z, t) - \frac{dF}{dz},$$
$$\frac{dc}{dt} = U_t(x, y, z, t) - \frac{dF}{dt},$$

dont les seconds membres se trouvent être indépendants de x, y. Car, en prenant par exemple la dérivée du dernier par rapport à x, on trouve

$$\frac{dU_t}{dx} - \frac{d}{dt}\frac{dF}{dx} = \frac{dU_t}{dx} - \frac{dU_x}{dt},$$

fonction de x, y, z, t qui est identiquement nulle à cause de l'identité

$$\frac{dU_x}{dt} = \frac{dU_t}{dx},$$

autre condition d'intégrabilité de la différentielle proposée; de même pour y, de même pour l'autre second membre (194).

En outre, la différentielle

$$(7) \qquad \left(U_z - \frac{dF}{dz}\right)dz + \left(U_t - \frac{dF}{dt}\right)dt$$

est exacte, parce que son unique condition d'intégrabilité

$$\frac{dU_z}{dt} - \frac{d^2F}{dz\,dt} = \frac{dU_t}{dz} - \frac{d^2F}{dz\,dt}$$

se réduit à

$$\frac{dU_z}{dt} = \frac{dU_t}{dz},$$

autre condition d'intégrabilité de la différentielle proposée.

On obtiendra donc la fonction $c(z, t)$ en prenant l'intégrale indéfinie de la différentielle (7) aux deux variables z, t seulement; d'où, si l'on nomme $'c(z, t)$ une de ses déterminations et C une constante arbitraire,

$$c(z, t) = {'c}(z, t) + C,$$

puis

$$u = F(x, y, z, t) + {'c}(z, t) + C.$$

L'intégration de la différentielle (7) pourrait encore être frac-

tionnée de la même manière ; et ainsi de suite, si les variables de la proposée étaient plus nombreuses.

On voit ainsi, d'une manière générale, qu'en décomposant le nombre h des variables indépendantes d'une différentielle exacte en une somme $h_1 + h_2 + \ldots + h_g$ de parties quelconques, *son intégration peut être décomposée en celles de g différentielles semblables ne comportant respectivement que* $h_1, h_2, \ldots, h_g$ *variables principales.*

Il est vrai que, *sauf une, toutes ces différentielles sont compliquées de variables paramétriques coexistant avec leurs variables principales.* Mais nous avons déjà dit (**217**, IV) qu'en fait cela n'a rien de gênant, du moins dans les calculs ordinaires.

220. *Habituellement on fait toujours* $g = h$, d'où

$$h_1 = h_2 = \ldots = h_g = 1,$$

parce que le cas où $h = 1$ est à la fois irréductible et le plus simple ; c'est la décomposition à laquelle nous avons fait allusion plus haut (**215**).

221. Un premier élargissement de la question traitée au n° **211** donne l'énoncé du problème suivant, dont il nous suffira d'esquisser la solution :

Assigner toutes les fonctions dont telles ou telles dérivées d'un même ordre total donné K *sont égales à des fonctions* (*olotropes*) *données de* $x, y, \ldots$.

I. La possibilité du problème exige l'intervention de certaines conditions d'intégrabilité qui se formeront toujours, en cherchant les dérivées de moindres ordres de la fonction inconnue qui puissent être considérées comme des dérivées de *plusieurs* des dérivées données, et en égalant identiquement pour chacune les diverses expressions qu'on en trouve en différentiant convenablement les fonctions données.

Le nombre de ces conditions dépend de ceux des variables et des dérivées d'ordre K qui sont ainsi données. Il est nul quand le nombre de ces dernières se réduit à 1 ; il atteint sa plus grande valeur quand elles sont toutes données comme au n° **211**.

II. Comme dans les cas précédemment examinés, la méthode des coefficients indéterminés (216) fournit une infinité de coefficients du développement de la fonction inconnue, *mais elle laisse entièrement arbitraires tous ceux des termes de degrés* $< K$, *une partie de ceux des termes de degré* K *et une infinité de ceux des termes de degrés* $> K$.

Il s'introduit ainsi dans l'expression générale de la fonction cherchée des *éléments* d'indétermination consistant en des constantes et fonctions *arbitraires* dont le nombre et la nature dépendent des circonstances. Nous l'avions déjà constaté d'une manière plus précise aux nos 217, 218, où nous nous trouvions dans des cas que celui-ci comprend aussi.

III. Comme au no 212, des intégrations successives de différentielles totales premières, fractionnées au besoin par la méthode du no 219, conduiraient encore à l'expression générale de la fonction cherchée.

222. Une dernière extension de la même question donne l'énoncé suivant, qui comprend tous les cas imaginables du calcul inverse des dérivées :

Trouver toutes les fonctions dont des dérivées d'ordres quelconques donnés (égaux ou inégaux) sont égales à des fonctions données.

Les conditions d'intégrabilité s'obtiendront toujours, en identifiant dans les moindres ordres totaux les expressions diverses de chaque dérivée de la fonction inconnue qui pourraient être déduites, par des différentiations différentes, de plusieurs des fonctions données à la fois.

Pour remonter ensuite à la fonction inconnue, on pourra, entre autres méthodes, chercher la fonction la plus générale que détermineraient celles des dérivées données qui sont de l'ordre total le moins élevé (221). Après quoi, il ne reste plus qu'à restreindre l'indétermination des fonctions arbitraires contenues dans l'expression provisoirement obtenue, en égalant aux autres fonctions données ses dérivées des ordres voulus.

Comme dans tous les cas plus restreints précédemment exa-

minés, *les fonctions qui répondent à la question restent localement olotropes dans toutes aires où les fonctions données et celles arbitraires introduites par l'intégration le sont toutes elles-mêmes*. Ce point essentiel résulte en substance de ce que nous n'obtenons *jamais* les fonctions cherchées que sous forme de séries entières par rapport aux accroissements des variables. Pour en faire une démonstration détaillée, il suffirait de raisonner comme nous l'avons fait dans les cas dont nous avons donné une étude complète.

223. Il serait oiseux d'insister davantage sur des questions aussi faciles; nous nous contenterons d'éclaircir, par les exemples suivants, les indications données dans les deux numéros précédents.

I. *On donne*

$$\frac{d^2u}{dx\,dy} = U_{1,1}(x, y).$$

Ici aucune condition d'intégrabilité ne s'impose; une première intégration (par rapport à y) donne (217)

$$\frac{du}{dx} = \int U_{1,1}\,dy = U_{1,0}(x, y) + {}'c_{1,0}(x);$$

une dernière (par rapport à x) conduit à

$$\begin{aligned} u &= \int U_{1,0}\,dx + \int {}'c_{1,0}(x)\,dx \\ &= U_{0,0}(x, y) + c_{1,0}(x) + c_{0,1}(y); \end{aligned}$$

$U_{1,0}$, $U_{0,0}$ désignent des déterminations particulières des intégrales indéfinies successivement rencontrées; ${}'c_{1,0}(x)$ et par suite $c_{1,0}(x)$ sont des fonctions arbitraires de x; $c_{0,1}(y)$ en est une autre de y.

II. *On donne*

$$\frac{du}{dx} = U_{1,0}(x, y), \qquad \frac{d^2u}{dy^2} = U_{0,2}(x, y).$$

Il y a une condition d'intégrabilité en jeu, parce que $\frac{d^3u}{dx\,dy^2}$ peut être obtenue de deux manières; elle est

$$\frac{d^2U_{1,0}}{dy^2} = \frac{dU_{0,2}}{dx}.$$

L'intégration de la première équation donne

$$u = U_{0,0}(x, y) + c_{0,0}(y),$$

$U_{0,0}$ désignant une détermination de $\int U_{1,0}\,dx$, et $c_{0,0}(y)$ une fonction de y *seulement,* à particulariser de manière que l'autre équation soit satisfaite. Il faut pour cela que

$$\frac{d^2 c_{0,0}}{dy^2} = U_{0,2}(x, y) - \frac{d^2 U_{0,0}}{dy^2} = U_2(y),$$

parce que x a disparu du second membre de cette équation à cause de la condition d'intégrabilité (raisonnement du n° **219**).

Deux intégrations par rapport à y exécutées consécutivement donnent

$$\frac{dc_{0,0}}{dy} = \int U_2(y)\,dy = U_1(y) + C_1,$$
$$c_{0,0}(y) = \int [U_1(y) + C_1]\,dy = U_0(y) + C_0 + C_1 y.$$

On en conclut définitivement

$$u = U_{0,0}(x, y) + U_0(y) + C_0 + C_1 y,$$

C_0, C_1 désignant deux constantes arbitraires et $U_{0,0}$, U_0 deux fonctions l'une de x, y, l'autre de y seulement, à choisir une fois pour toutes parmi les diverses déterminations dont elles sont susceptibles.

223 *bis.* Comme nous le verrons dans la quatrième Partie de cet Ouvrage, l'évaluation de l'aire découpée dans un plan par un arc de ligne plane, les ordonnées de ses extrémités et l'axe des abscisses, exigent le calcul de la fonction qui a pour dérivée l'ordonnée d'un point de cette ligne, considérée comme une fonction de son abscisse. A cause de cela, on a donné le nom générique de *quadratures* aux diverses opérations du calcul inverse des dérivées, en l'appliquant toutefois d'une manière plus spéciale à l'intégration d'une différentielle totale première donnée.

Indépendance relative de différentiations et d'intégrations successives.

224. Dès la nomenclature des dérivées (**158**), nous savons que le résultat de dérivations d'ordres et de natures quelconques ne

dépend pas de leur mode de succession. *Même observation s'applique, du moins en général et sous certaines conditions évidentes, à une superposition quelconque de pareilles opérations et de celles inverses étudiées dans ce Chapitre, c'est-à-dire d'intégrations.*

L'étude complète des deux cas particuliers ci-après suffira amplement à l'intelligence de la chose, ainsi qu'à tous nos besoins ultérieurs.

225. *Si la différentielle*

$$U_x(x, y, z)dx + U_y(x, y, z)dy \tag{1}$$

est exacte, cas auquel cette autre

$$\frac{dU_x}{dz}dx + \frac{dU_y}{dz}dy$$

l'est évidemment aussi, on a

$$\frac{d}{dz}\int[U_x dx + U_y dy] = \int\left[\frac{dU_x}{dz}dx + \frac{dU_y}{dz}dy\right], \tag{2}$$

cette relation signifiant qu'aucun membre n'a de déterminations (olotropes) qui n'appartiennent aussi à l'autre.

Si $u(x, y, z)$ désigne quelque détermination particulière de l'intégrale indéfinie de la différentielle (1), $\frac{du}{dz}$ en est une aussi du premier membre de la relation (2) et du second également à cause de

$$\frac{d}{dx}\frac{du}{dz} = \frac{d}{dz}\frac{du}{dx} = \frac{dU_x}{dz}, \qquad \frac{d}{dy}\frac{du}{dz} = \frac{d}{dz}\frac{du}{dy} = \frac{dU_y}{dz}.$$

En appelant donc $c(z)$, $c_1(z)$ deux fonctions olotropes arbitraires de z seulement,

$$\frac{du}{dz} + \frac{dc(z)}{dz}, \qquad \frac{du}{dz} + c_1(z)$$

seront les formes générales des deux membres de cette relation. Or ces expressions ne renferment que les mêmes fonctions; car $c(z)$ ayant été déterminée, on rendra $c_1(z) = \frac{dc(z)}{dz}$, en prenant

$c_1(z) = c'(z)$; si au contraire c'est $c_1(z)$ qui a été d'abord déterminée, on rendra $\frac{dc(z)}{dz} = c_1(z)$, en prenant $c(z) = \int c_1(z)dz$.

226. *On a dans le même sens*

$$\begin{aligned}\int[dz\int(U_{x,z}dx + U_{y,z}dy) + dt\int(U_{x,t}dx + U_{y,t}dy)]\\ = \int[dx\int(U_{x,z}dz + U_{x,t}dt) + dy\int(U_{y,z}dz + U_{y,t}dt)],\end{aligned}$$

$U_{x,z}$, ... *désignant des fonctions des quatre variables* x, y, z, t, *pourvu que la nature relative de ces fonctions et le choix des fonctions arbitraires rendent exactes toutes les différentielles à intégrer successivement.*

La possibilité supposée des intégrations (quand bien même on ne la connaîtrait que pour un seul membre) assure évidemment l'existence de quelque fonction olotrope $u(x, y, z, t)$ jouissant de la propriété d'avoir $U_{x,z}$, $U_{y,z}$, $U_{x,t}$, $U_{y,t}$ pour dérivées secondes par rapport à x et z, y et z, x et t, y et t, respectivement; et cette fonction est évidemment une détermination particulière tant du premier membre que du second.

En appelant $c_z(z, t)$, $c_t(z, t)$ deux fonctions de z, t seulement, entièrement arbitraires sous la seule condition de rendre exacte la différentielle $c_z dz + c_t dt$, et $c(x, y)$ une fonction arbitraire de x, y seulement, la forme générale du premier membre est évidemment

$$u + \int(c_z dz + c_t dt) + c(x, y);$$

celle du second est pareillement

$$u + \int(\gamma_x dx + \gamma_y dy) + \gamma(z, t); \tag{3}$$

et ces deux expressions renferment encore les mêmes fonctions. Car pour rendre, par exemple, la seconde identique à une détermination donnée de la première, il suffit de prendre

$$\gamma = \int(c_z dz + c_t dt), \qquad \gamma_x = \frac{dc}{dx}, \qquad \gamma_y = \frac{dc}{dy}$$

et de choisir convenablement la détermination de l'intégrale indéfinie qui figure dans l'expression (3).

Intégrales définies simples.

227. *En appelant*

$$F(x, y, \ldots)$$

quelque détermination particulière de l'intégrale indéfinie de la différentielle totale première à h variables, supposée exacte,

(1) $$U_x dx + U_y dy + \ldots,$$

puis

(2) $$[x_0 X], \quad [y_0 Y], \quad \ldots,$$

des chemins commençant en

(3) $$x_0, \quad y_0, \quad \ldots,$$

finissant en

(4) $$X, \quad Y, \quad \ldots$$

et tracés arbitrairement dans des aires

$$S_x, \quad S_y, \quad \ldots,$$

où toutes les fonctions U_x, U_y, ... *restent, bien entendu, localement olotropes, la différence*

(5) $$F(X, Y, \ldots) - F(x_0, y_0, \ldots)$$

des valeurs initiale et finale de $F(x, y, \ldots)$ *calculée en marchant sur les chemins* (2) (**171**) (**172**), *conserve la même valeur quand on substitue à cette fonction toute autre détermination* $F_1(x, y, \ldots)$ *de la même intégrale indéfinie.*

Comme, en appelant C quelque quantité constante, on a identiquement (**209**, II)

$$F_1(x, y, \ldots) = F(x, y, \ldots) + C,$$

on a aussi au commencement et à la fin des chemins (2) les égalités

$$F_1(x_0, y_0, \ldots) = F(x_0, y_0, \ldots) + C,$$
$$F_1(X, Y, \ldots) = F(X, Y, \ldots) + C,$$

dont la soustraction membre à membre conduit à celle qu'il fallait prouver.

228. La différence (5) se nomme l'intégrale *définie* de cette différentielle, *prise* sur ces chemins *d'intégration,* entre les *limites inférieures* (3) et *supérieures* (4). On la représente par

$$(6) \qquad \int_{x_0, y_0, \ldots}^{X, Y, \ldots} (U_x dx + U_y dy + \ldots),$$

en remplaçant quelquefois les limites par tel autre signe rappelant mieux les chemins à suivre.

Elle dépend ainsi de ses limites (3), (4), considérées comme $2h$ variables indépendantes, et peut changer de valeur avec la forme des chemins d'intégration. C'est donc, en réalité, ce que nous avons appelé une *pseudo-fonction* des limites (**172**) et confondu avec une fonction véritable sous des restrictions qu'il ne faut pas oublier (**175**, IV).

Les équations fondamentales

$$\frac{dF}{dx} = U_x(x, y, \ldots), \qquad \frac{dF}{dy} = U_y(x, y, \ldots), \qquad \ldots,$$

montrent immédiatement que *cette fonction* (6) *a*

$$U_x(X, Y, \ldots), \quad U_y(X, Y, \ldots), \quad \ldots$$

et

$$-U_x(x_0, y_0, \ldots), \quad -U_y(x_0, y_0, \ldots), \quad \ldots$$

pour dérivées premières par rapport à ses limites supérieures et inférieures respectivement.

A cause de cela, on représente souvent par

$$\int_{x_0, y_0, \ldots}^{x, y, \ldots} (U_x dx + U_y dy + \ldots)$$

la détermination de l'intégrale indéfinie qui s'annule en $x_0, y_0, \ldots$; mais la confusion faite ainsi entre les limites supérieures et les variables d'intégration met dans cette notation une certaine incorrection contre laquelle il faut rester en garde.

229. Pour les motifs donnés au n° **215** nous nous placerons

désormais dans le cas d'une seule variable d'intégration, et nous commencerons par quelques observations presque évidentes.

I. En appelant

$$F(x_1),\quad F(x_2),\quad \ldots,\quad F(x_k)$$

les valeurs successivement acquises par $F(x)$ en $x_1, x_2, \ldots, x_k$ points intermédiaires marqués à volonté sur le chemin d'intégration, l'égalité

$$F(X)-F(x_0)=[F(x_1)-F(x_0)]+[F(x_2)-F(x_1)]+\ldots \\ +[F(X)-F(x_k)]$$

ou bien

$$\int_{x_0}^{X} U(x)\,dx=\int_{x_0}^{x_1} U(x)\,dx+\int_{x_1}^{x_2} U(x)\,dx+\ldots+\int_{x_k}^{X} U(x)\,dx,$$

montre que *l'intégrale définie considérée est la somme de celles qu'on obtient en la prenant successivement sur les tronçons du chemin d'intégration arbitrairement découpé.*

II. *Deux chemins d'intégration de mêmes extrémités donnent la même valeur à l'intégrale définie, si l'un peut être amené à coïncider avec l'autre par une déformation progressive effectuée dans une aire où la fonction* $U(x)$ *placée sur le signe* $\int$ *reste localement olotrope.* Car dans une pareille aire toute détermination de l'intégrale indéfinie est localement olotrope (208) et de plus monodrome (173).

III. *L'intégrale définie est nulle, quand elle est prise de* x_0 *à* x_0 *sur un chemin (partant fermé) dont on peut rapprocher indéfiniment tous les points de* x_0 *en le rétrécissant progressivement dans une aire de la nature spécifiée ci-dessus* (II).

Car, $F(x)$ étant encore monodrome dans cette aire, on a

$$F(X)=F(x_0)$$

à cause de $X=x_0$.

IV. Le chemin $[x_0X]$ allongé de son parcours en sens contraire constitue un chemin fermé auquel l'observation précédente est applicable. On a donc (I)

$$\int_{x_0}^{X} U(x)\,dx+\int_{X}^{x_0} U(x)\,dx=0,$$

ou bien

$$\int_{X}^{x_0} U(x)\,dx = -\int_{x_0}^{X} U(x)\,dx,$$

ce qu'on exprime en disant que *l'intégrale change simplement de signe quand on permute ses limites sans changer la forme géométrique du chemin d'intégration.*

V. Sur un chemin fermé quelconque, l'intégrale définie ne s'évanouit plus nécessairement comme dans l'alinéa III. Mais *sur deux contours fermés elle prend des valeurs égales, quand on peut faire coïncider l'un avec l'autre, en figure et en sens de parcours, par une déformation progressive exécutée dans une aire où* $U(x)$ *est olotrope (à proprement parler).*

Formons en effet un autre contour fermé en plaçant bout à bout : 1° le premier contour intérieur $[x_0 x_0]$ parcouru dans le sens voulu, de l'un de ses points x_0 au même point x_0; 2° un chemin ouvert $[x_0 x_1]$ tracé arbitrairement dans l'aire spécifiée de x_0 à x_1, point choisi à volonté sur le second contour; 3° le dernier contour $[x_1 x_1]'$ parcouru dans un sens contraire au sens voulu; 4° le chemin ouvert $[x_1 x_0]$.

Il est visible que ce nouveau contour satisfait, relativement à l'aire spécifiée, aux conditions de l'alinéa III. L'intégrale définie s'y évanouit donc, ce qui donne

$$\{x_0 x_0\} + \{x_0 x_1\} + \{x_1 x_1\}' + \{x_1 x_0\} = 0,$$

en affectant ces diverses notations à ses quatre parties fournies respectivement par les quatre tronçons ci-dessus définis du parcours total (I).

Comme on a

$$\{x_1 x_0\} = -\{x_0 x_1\},$$

parce qu'il s'agit de la même ligne géométrique $[x_0 x_1]$ parcourue d'abord dans un sens, ensuite en sens contraire (IV), puis pour la même raison

$$\{x_1 x_1\}' = -\{x_1 x_1\},$$

$x_1 x_1\}$ représentant l'intégrale définie prise sur le second contour,

mais maintenant dans le sens voulu, il reste seulement

$$\{x_1 x_1\} = \{x_0 x_0\},$$

ce que nous voulions prouver.

230. Voici ce que deviennent pour les intégrales définies les premières règles usuelles du calcul des intégrales indéfinies.

I. En supposant dans la formule (18) du n° **215** les intégrales indéfinies remplacées par des déterminations particulières rendant les deux membres égaux quelle que soit x, on trouvera aussi en marchant sur un même chemin d'intégration pour toutes

$$\int_{x_0}^{X} U(x)\,dx = a_1 \int_{x_0}^{X} U_1(x)\,dx + a_2 \int_{x_0}^{X} U_2(x)\,dx + \ldots + a_g \int_{x_0}^{X} U_g(x)\,dx.$$

II. La même particularisation faite dans la relation (19) du numéro cité donnera aussi

$$\int_{x_0}^{X} [\pm U_1(x) \pm U_2(x) \pm \ldots]\,dx = \pm \int_{x_0}^{X} U_1(x)\,dx \pm \int_{x_0}^{X} U_2(x)\,dx \pm \ldots,$$

pourvu, bien entendu, que les conditions posées soient toujours remplies.

231. Quand la fonction $f(x, x')$ est localement olotrope dans les aires

$$(7) \qquad S_x, \quad S_{x'},$$

nous avons vu généralement aux n^os **217** et suivants, qu'une détermination particulière quelconque $F(x, x')$ de l'intégrale indéfinie

$$\int f(x, x')\,dx$$

est une fonction de la variable principale x et de la variable paramétrique x', qui, elle aussi, est localement olotrope dans ces deux aires. L'intégrale définie

$$(8) \qquad \int_{x_0}^{X} f(x, x')\,dx = F(X, x') - F(x_0, x')$$

prise sur un chemin d'intégration tracé dans S_x est donc une fonc-

tion des trois variables x_0, X, x', qui jouit de la même propriété pour toutes les valeurs des deux premières qui tombent dans S_x et de la dernière qui sont situées dans $S_{x'}$. Il en résulte que cette fonction peut être différentiée ou intégrée par rapport à x' pour de pareilles valeurs, x_0, X jouant alors le rôle de paramètres. En appliquant alors ce que nous avons vu dans les nos **225** et suivants, on obtient en particulier les deux formules que nous allons établir.

232. *On a*

$$\frac{d}{dx'}\int_{x_0}^{X} f(x, x')\,dx = \int_{x_0}^{X} \frac{df(x, x')}{dx'}\,dx, \tag{9}$$

le chemin d'intégration étant naturellement le même dans le second membre que dans le premier.

D'après la relation (8), le premier membre de cette formule est égal à

$$\frac{d\,F(X, x')}{dx'} - \frac{d\,F(x_0, x')}{dx'}, \tag{10}$$

c'est-à-dire à la différence des valeurs initiale et finale de $\frac{d\,F(x, x')}{dx'}$ calculées sur le chemin d'intégration. Mais (**225**) cette dernière fonction est quelque détermination de l'intégrale indéfinie

$$\int \frac{df(x, x')}{dx'}\,dx;$$

la différence (10) est donc celle des valeurs initiale et finale de cette détermination, calculée sur le chemin d'intégration, c'est-à-dire la valeur du second membre de la formule (9), comme il fallait le faire voir.

233. *En intégrant de* x'_0 *à* X′ *sur un chemin tracé dans l'aire* $S_{x'}$, *on a*

$$\int_{x'_0}^{X'} dx' \int_{x_0}^{X} f(x, x')\,dx = \int_{x_0}^{X} dx \int_{x'_0}^{X'} f(x, x')\,dx'. \tag{11}$$

D'après ce qui a été vu au n° **226** dans un cas même bien moins simple, il existe quelque fonction $U(x, x')$, localement olotrope

dans les aires (7), qui satisfait à l'équation différentielle

$$\frac{d^2 u}{dx\,dx'} = \frac{d}{dx}\frac{du}{dx'} = \frac{d}{dx'}\frac{du}{dx} = f(x, x');$$

et les fonctions

$$U_{0,1}(x, x') = \frac{dU}{dx'}, \qquad U_{1,0}(x, x') = \frac{dU}{dx}$$

sont ainsi des déterminations particulières des intégrales indéfinies

$$\int f(x, x')\,dx, \qquad \int f(x, x')\,dx'.$$

Il en résulte

$$\int_{x_0}^{X} f(x, x')\,dx = U_{0,1}(X, x') - U_{0,1}(x_0, x'),$$

ce qui donne pour valeur du premier membre de la relation (11)

$$\begin{aligned}\int_{x'_0}^{X'} U_{0,1}(X, x')\,dx' - \int_{x'_0}^{X'} U_{0,1}(x_0, x')\,dx' \\ = U(X, X') - U(X, x'_0) - U(x_0, X') + U(x_0, x'_0),\end{aligned}$$

expression dont les trois premiers termes sont les valeurs finales acquises par $U(x, x')$ quand, partant de la valeur initiale $U(x_0, x'_0)$, on fait parcourir les chemins d'intégration par : soit x, x' simultanément, soit x seulement, soit x' seulement.

Cette méthode, appliquée au second membre de la relation (11), en prenant $U_{1,0}(x, x')$ pour point de départ, conduit à cette même expression, ce qu'il fallait constater.

A cause de cette indifférence de l'ordre des intégrations, on représente habituellement le résultat de leur exécution successive par

$$\int_{x_0}^{X} \int_{x'_0}^{X'} f(x, x')\,dx\,dx',$$

variété la plus simple des *intégrales doubles* dont nous aurons à parler dans notre troisième Partie.

234. En faisant varier l'ordre de la différentielle, le nombre de ses variables soit principales soit paramétriques, le nombre et la nature des intégrations et des différentiations à exécuter sur elle, etc., le principe général d'indépendance dont nous avons

donné les premiers aperçus aux nos **224** et suivants conduirait à une infinité d'autres propositions analogues; on les démontrera sans peine par les mêmes procédés, mais leur réunion en un seul énoncé serait plus laborieuse que difficile et utile. Les deux précédentes, qui peuvent leur servir de types, sont les plus simples et les plus souvent employées.

235. La propriété suivante des intégrales définies fournit leur définition habituelle; et, bien que son intérêt purement analytique soit des plus médiocres, bien que ce point de vue soit des moins commodes et des moins satisfaisants, la plupart des auteurs s'y placent encore; mais elle est d'une utilité capitale dans l'évaluation numérique de beaucoup de grandeurs concrètes et, par suite, dans les applications géométriques et physiques.

Si dans une aire imperforée S *où* $f(x)$ *est olotrope, on prend* $m+2$ *valeurs particulières de* x

(12) $$x_0,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_m,\ \mathrm{X},$$

les extrêmes x_0, X *fixes, les autres* $x_1, \ldots, x_m$ *variant en nombre et en position de manière à remplir ces deux conditions : que le plus grand module* r_m *de la différence de deux consécutives soit infiniment petit* (*ce qui exige que* m *soit infini*) *et que la somme positive*

$$l_m = \mathrm{mod}(x_1 - x_0) + \mathrm{mod}(x_2 - x_1) + \ldots + \mathrm{mod}(\mathrm{X} - x_m)$$

reste inférieure à quelque quantité invariable L, *la variante*

$$\mathrm{V}_m = (x_1 - x_0)f(x_0) + (x_2 - x_1)f(x_1) + \ldots + (\mathrm{X} - x_m)f(x_m)$$

a pour limite l'intégrale

(13) $$\int_{x_0}^{\mathrm{X}} f(x)\,dx$$

prise sur un chemin quelconque tracé de x_0 *à* X *dans l'aire* S.

Comme $\mathrm{F}(x)$, détermination particulière arbitrairement choisie de $\int f(x)\,dx$, est olotrope dans l'aire S avec le même olomètre δ que $f(x)$ (**208**) (**209**, VI), on a pour toutes valeurs de x tombant dans S et de mod$h$ inférieures à δ

$$\mathrm{F}(x+h) = \mathrm{F}(x) + h\mathrm{F}'(x) + h^2\varphi(x, h),$$

où (200) on peut assigner une quantité positive $\varepsilon < \delta$ telle que, pour les mêmes valeurs de x et pour $\operatorname{mod} h < \varepsilon$, on ait sans cesse

$$\operatorname{mod} \varphi(x, h) < \mathrm{R},$$

R désignant quelque quantité positive invariable.

A partir du moment où r_m reste inférieur à ε, on trouvera, en faisant successivement

$$(x, h) = (x_0, x_1 - x_0),\ (x_1, x_2 - x_1),\ \ldots,\ (x_i, x_{i+1} - x_i),\ \ldots,\ (x_m, \mathrm{X} - x_m)$$

dans la relation précédente, en se rappelant que $\mathrm{F}'(x) = f(x)$ et en ajoutant membre à membre les résultats obtenus,

$$\mathrm{F}(\mathrm{X}) - \mathrm{F}(x_0) = \int_{x_0}^{\mathrm{X}} f(x)\, dx = \mathrm{V}_m + \Sigma_i (x_{i+1} - x_i)^2 \varphi(x_i, x_{i+1} - x_i).$$

Le terme de la somme Σ, mis en évidence, a un module évidemment inférieur à $r_m \operatorname{mod}(x_{i+1} - x_i)\mathrm{R}$; le module de cette somme est donc inférieur à $r_m l_m \mathrm{R} < \mathrm{RL} r_m$ et par suite infiniment petit comme r_m, ce qu'il suffit de prouver.

236. Quand la première condition de l'énoncé précédent est remplie, *la seconde l'est d'elle-même si les quantités* (12) *sont les sommets d'une ligne brisée convenablement inscrite dans une ligne* $[x_0 \mathrm{X}]$ *de forme invariable, tracée de* x_0 *à* X *dans l'aire* S (*et composée d'arcs sans points singuliers*); nous démontrerons effectivement dans notre quatrième Partie que l_m tend alors vers la longueur même de la ligne $[x_0 \mathrm{X}]$ en lui restant toujours inférieure. On se place habituellement dans cette hypothèse, en prenant ces quantités (12) sur le chemin d'intégration même où l'intégrale définie (13) doit être calculée; mais elle n'est pas nécessaire.

237. *En appelant* M *une limite supérieure de* $\operatorname{mod} f(x)$ *sur le chemin d'intégration de longueur* L, *on a*

$$\operatorname{mod} \int_{x_0}^{\mathrm{X}} f(x)\, dx < \mathrm{ML}.$$

Car on a évidemment, quel que soit m,

$$\operatorname{mod} V_m < l_m M < ML,$$

en vertu de l'observation faite dans le numéro précédent.

Intégrales définies artificielles.

238. Toutes les considérations précédentes exigent essentiellement que les fonctions considérées soient olotropes dans les circonstances où l'on raisonne. Il en résulte, en particulier, que *la notation*

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx \tag{1}$$

n'a plus aucun sens quand le chemin d'intégration contient quelque valeur de x, singulière pour $f(x)$, ou bien quand il est illimité dans quelque direction. Mais alors il y a souvent intérêt à lui donner une signification *conventionnelle* dans les cas dont nous allons parler.

239. Supposons d'abord que $f(x)$ entre dans une phase singulière en X seulement, et soit X′ une quantité variable se rapprochant indéfiniment de X sur le chemin d'intégration. L'intégrale définie qui existe sans cesse

$$\int_{x_0}^{X'} f(x)\,dx \tag{2}$$

constitue alors une variante d'une nature spéciale qui peut ou non avoir une limite. Dans le premier cas, *on dit et on écrit par convention*

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = \lim \int_{x_0}^{X'} f(x)\,dx. \tag{3}$$

Dans le second cas, on dit, selon les circonstances, que l'intégrale définie (1) est *infinie* ou *indéterminée.*

240. Supposons, en second lieu, que le chemin d'intégration, toujours dans une aire où $f(x)$ est olotrope, s'allonge indéfiniment

dans le sens où il faut y marcher. On considérera de même l'intégrale définie variable (2) où X' désigne un point s'éloignant indéfiniment sur ce chemin dans la direction voulue; si elle tend vers une limite, on écrit encore

$$\int_{x_0}^{\infty} f(x)\,dx = \lim \int_{x_0}^{X'} f(x)\,dx;$$

sinon on dit, selon le cas, que le premier membre de cette égalité est *infini* ou *indéterminé*.

241. Par exemple, k étant un entier positif > 1,

$$\int_{x_0}^{0} x^{-k}\,dx$$

où la fonction sous le signe a $x = 0$ pour valeur singulière, est infinie. Effectivement l'intégrale définie variable (2) est alors

$$\frac{X'^{-k+1} - x_0^{-k+1}}{-k+1},$$

quantité infinie pour X' infiniment petite.

Au contraire, et en supposant x_0 non $= 0$, cette dernière expression tend pour X' infinie vers la limite $-\dfrac{x_0^{-k+1}}{-k+1}$ que l'on convient de prendre pour valeur de

$$\int_{x_0}^{\infty} x^{-k}\,dx$$

(ici la forme du chemin d'intégration est indifférente).

242. Quand l'intégrale indéfinie peut être exprimée au moyen de fonctions auparavant connues, la discussion de l'intégrale définie variable (2) se trouve ramenée aux types courants et ne présente habituellement aucune difficulté; c'est ce qui avait lieu pour l'exemple proposé ci-dessus. Mais il est rare qu'il en soit ainsi, qu'on ne se trouve pas en présence de l'inconnu et de l'aléatoire impliqués dans toutes les phases singulières. Voici les artifices les plus généralement employés.

I. Dans le cas du n° **239**, on peut d'abord essayer de déve-

lopper $f(x)$ par la formule de Taylor à partir d'une valeur initiale X_0 prise assez voisine de X, pour que, sauf en X éventuellement, la série converge pour toute valeur de x prise entre X_0 et X à l'extrémité du chemin d'intégration. En intégrant terme à terme cette série entière en $x - X_0$, on en obtient une autre indiquant ce qui se passe, si toutefois il est possible d'apercevoir comment varie sa somme quand x tend vers X.

On a plus de chances de succès en cherchant à exécuter sur $f(x)$, à partir de la valeur singulière X elle-même, quelque développement procédant suivant telles ou telles fonctions simples (non toutes olotropes en X) et toujours intégrable terme à terme (*Cf.* 275, *inf.*); tels sont, par exemple, ceux procédant suivant les puissances de $x - X$ à exposants non entiers positifs, dont nous parlerons dans notre deuxième Partie. La nouvelle série engendrée par l'intégration de celle-ci est habituellement bien plus facile à discuter que celle de Taylor mentionnée tout à l'heure.

On remarquera que *l'intégrale définie artificielle* (1) *existe toujours, si $f(x)$ est finie quand x tend vers* X *sur le chemin d'intégration*. L'intégrale (2) est effectivement une variante dont deux états de grandeur correspondant aux valeurs X′, X″ de sa limite variable ont pour différence

$$\int_{x_0}^{X''} f(x)\,dx - \int_{x_0}^{X'} f(x)\,dx = \int_{X'}^{X''} f(x)\,dx \quad (229, \text{I}),$$

et le module de cette dernière intégrale tend toujours vers 0, car il ne peut surpasser le produit du module maximum de $f(x)$ qu'on suppose fini, par la longueur du chemin $[X'X'']$ qui est infiniment petite, comme différence de celles des chemins $[x_0X'']$, $[x_0X']$ ayant pour limite commune celle de $[x_0X]$ (237). La variante en question est donc convergente (78).

II. Dans le cas du n° 240, le partage du chemin d'intégration variable $[x_0X']$ en tronçons invariables $[x_0x_1]$, $[x_1x_2]$, ..., $[x_ix_{i+1}]$, ... complétés par $[x_gX']$, les uns et les autres découpés suivant une loi appropriée aux circonstances, transforme l'intégrale variable (2) en la somme

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{g-1} + \int_{x_g}^{X'} f(x)\,dx,$$

où, pour abréger, u_i représente l'intégrale $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx$. Quand $f(X')$ tend vers o, occurrence la plus fréquente, et quand on rend finie la longueur du dernier tronçon $[x_g X']$, l'intégrale figurant dans la somme ci-dessus est infiniment petite (**237**); et quelque limite existe évidemment ou non pour l'intégrale variable (2), selon que la série

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots$$

est convergente ou divergente. C'est un moyen de discussion souvent précieux.

Un autre bien plus rapide, quand il aboutit, consiste à décomposer le chemin d'intégration infini en deux parties, l'une invariable et contenant la valeur $x = 0$ si elle se trouve sur le chemin proposé, l'autre illimitée et ne contenant plus le point $x = 0$. L'intégrale (2) se trouve ainsi décomposée en deux parties correspondantes, dont la seconde est seule à discuter. En appelant t une nouvelle variable d'intégration, la substitution $x = \frac{1}{t}$ (333, *inf.*) transforme cette seconde intégrale en une autre à calculer sur un nouveau chemin, auquel les considérations de l'alinéa précédent sont applicables quand il est de longueur finie, ce qui arrive habituellement.

243. Plaçons-nous enfin dans le cas le plus général où le chemin d'intégration est illimité dans les deux sens et où il contient en outre des valeurs singulières en nombre quelconque q,

$$(4) \qquad a,\ b,\ c,\ \ldots,\ h.$$

En appelant $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{q-1}$, X des valeurs particulières invariables de x prises à volonté sur le chemin d'intégration, la première en deçà de a, la seconde entre a et b, la troisième entre b et c, ..., la dernière au delà de h, puis x''_0, X' deux quantités variables s'éloignant à l'infini sur le chemin d'intégration, la seconde dans le sens où il faut y marcher, la première en sens contraire, puis encore a', a'' deux quantités variables se rapprochant indéfiniment de a sur le chemin d'intégration en restant toutefois la première en deçà, la seconde au delà de a, et aussi

$$(b', b''),\quad (c', c''),\quad \ldots,\quad (h', h'')$$

des couples de quantités variables jouissant de la même propriété relativement aux autres valeurs singulières, on considérera les intégrales variables

$$(5)\quad \begin{cases} \int_{x_0''}^{x_0} f(x)\,dx, & \int_{x_0}^{a'} f(x)\,dx, \quad \int_{a''}^{x_1} f(x)\,dx, \quad \int_{x_1}^{b'} f(x)\,dx, \\ \int_{b''}^{x_2} f(x)\,dx, & \ldots, \quad \int_{x_{q-1}}^{h'} f(x)\,dx, \quad \int_{h''}^{X} f(x)\,dx, \quad \int_{X}^{X'} f(x)\,dx \end{cases}$$

Si chacune d'elles tend individuellement vers une limite, *cela de quelque manière que* x_0'', a', a'', b', b'', ..., h', h'', X' *puissent varier simultanément dans les conditions générales qui ont été spécifiées,* leur somme tend aussi vers une limite qu'on adopte pour valeur conventionnelle de l'intégrale

$$(6)\qquad \int_{\infty}^{\infty} f(x)\,dx$$

prise sur le chemin dont il s'agit. Sinon, on dit comme ci-dessus que cette intégrale est infinie ou indéterminée.

Si les valeurs singulières (4) étaient en nombre illimité, il y aurait à prendre, au lieu de la somme des limites vers lesquelles tendent les intégrales (5), la somme de la série formée par ces limites quand elle est convergente.

244. Dans les cas où la somme variable des intégrales (5) n'a point de limite, il peut arriver qu'on lui en fasse acquérir une en imposant à quelques couples des limites variables qui ont servi à la former les conditions

$$\operatorname{mod}(a''-a) = \operatorname{mod}(a'-a), \qquad \operatorname{mod}(b''-b) = \operatorname{mod}(b'-b), \qquad \ldots.$$

Alors l'intégrale (6) reste bien toujours infinie ou indéterminée, mais on dit qu'elle a pour *valeur principale* cette limite spéciale dont la considération est quelquefois utile.

Par exemple, l'intégrale

$$(7)\qquad \int_{x_0}^{X} x^{-k}\,dx \qquad (k > 1),$$

prise sur l'axe des quantités réelles, de la limite négative x_0 à la

limite positive X, est infinie ou indéterminée, parce que la somme (5) se réduit ici à

$$\frac{1}{-k+1}\left(X^{-k+1}-x_0^{-k+1}+a'^{-k+1}-a''^{-k+1}\right),$$

où a', a'' tendent vers zéro, la première négativement, la seconde positivement. Mais si k est impair et si l'on prend égales les valeurs numériques de a', a'', cette somme conserve la valeur constante

$$\frac{1}{-k+1}\left(X^{-k+1}-x_0^{-k+1}\right),$$

qui en constitue dès lors la limite et qui est la valeur principale de l'intégrale (7).

245. Il faut noter avec soin qu'aucune des expressions dont nous venons de parler n'est une intégrale définie autrement que de *nom;* par suite, on ne peut leur étendre telle ou telle proposition du paragraphe précédent avant de s'être assuré qu'on en a bien le droit, à l'aide d'un *nouveau raisonnement* institué par exemple sur les expressions maniables des parties critiques de l'intégrale, que les considérations du n° **242** permettent habituellement de former.



CHAPITRE IX.

FONCTIONS COMPOSÉES.

Circonstances générales dans lesquelles les fonctions composées sont olotropes.

246. La *composition* des fonctions, qui en fait naître une infinité de quelques-unes en nombre extraordinairement restreint, est une opération tellement courante qu'on l'exécute à chaque instant presque sans en avoir conscience. Elle consiste à *substituer* aux variables u, v, ... d'une fonction donnée

(1) $$f(u, v, \ldots),$$

autant d'autres fonctions données

(2) $$U(x, y, \ldots), \quad V(x, y, \ldots), \quad \ldots$$

d'autres variables x, y, ..., ce qui engendre évidemment une nouvelle fonction de ces dernières

(3) $$F(x, y, \ldots) = f[U(x, y, \ldots), \quad V(x, y, \ldots), \quad \ldots].$$

Des dénominations spéciales caractérisent les rôles relatifs joués dans cette opération par les diverses fonctions qui y concourent : les fonctions (2) sont dites *simples*; $f(u, v, \ldots)$ se nomme la fonction *composante* et $F(x, y, \ldots)$, la fonction *composée*.

Par exemple, la somme, le produit, le rapport, etc., de plusieurs fonctions simples, ne sont pas autre chose que des fonctions composées formées avec les composantes

$$u + v + \ldots, \quad uv \ldots, \quad \frac{u}{v}, \quad \ldots.$$

Les fonctions rationnelles sont celles que l'on prend le plus

fréquemment pour fonctions simples et surtout pour composantes.

247. La méthode suivie dans cet Ouvrage nous impose, pour chaque nouvelle espèce de fonctions, l'obligation d'assigner avant tout les limites entre lesquelles elles sont olotropes. Pour les fonctions composées et dans un cas qui est de beaucoup le plus étendu, ces limites sont déterminées par le théorème suivant :

Si les fonctions simples (2) *sont toutes olotropes dans les aires limitées* S_x, S_y, ... *et si la composante* (1) *jouit de la même propriété dans des aires* S_u, S_v, ... *contenant toutes les valeurs que font acquérir aux fonctions simples les diverses valeurs de* x, y, ... *tombant dans* S_x, S_y, ..., *la fonction composée est certainement olotrope dans ces dernières aires.*

La grandeur des olomètres étant indifférente à l'exactitude générale du raisonnement (**202**), nous simplifierons nos écritures en désignant simplement par δ, ϑ deux quantités positives inférieures, l'une à tous les olomètres des fonctions simples à la fois, l'autre à tous ceux de la composante. En outre, nous supposerons d'abord que les valeurs o, o, ... de x, y, ... tombent dans les aires S_x, S_y, ... et annulent toutes les fonctions simples, que les valeurs o, o, ... de u, v, ... tombent pareillement dans les aires S_u, S_v, ..., et qu'il s'agit de développer la fonction composée par la formule de Maclaurin.

Pour la composante, un pareil développement donnera la série entière

$$(4) \qquad f(u, v, \ldots) = \Sigma(k_{M,N,\ldots} u^M v^N \ldots)$$

dont tous les rayons de convergence sont supérieurs à ϑ; pour les fonctions simples, il fournira les séries entières

$$(5) \qquad \left\{ \begin{array}{l} U(x, y, \ldots) = \Sigma(a_{m,n,\ldots} x^m y^n \ldots), \\ V(x, y, \ldots) = \Sigma(b_{m,n,\ldots} x^m y^n \ldots), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right.$$

qui ne contiennent point de termes constants, et dont tous les rayons de convergence sont au moins égaux à δ.

Appelons maintenant δ' une quantité positive inférieure à δ et M

une limite supérieure commune des modules de toutes les fonctions simples, dans les aires S_x, S_y, ... accrues de zones additionnelles dont les épaisseurs sont comprises entre δ' et δ (181). Cette quantité M sera en particulier une limite supérieure des modules des sommes des séries (5), pour toutes valeurs de $x, y, \ldots$ ayant des modules égaux à δ'; et, comme ces séries sont dépourvues de termes constants, on conclura du n° 132 que, pour des modules ξ, η, ... de $x, y, \ldots$ tous inférieurs à δ', les sommes

$$\Sigma(\alpha_{m,n,\ldots}\xi^m\eta^n\ldots),\quad \Sigma(\beta_{m,n,\ldots}\xi^m\eta^n\ldots),\quad \ldots$$

des séries formées par les modules de leurs termes sont toutes inférieures à la même quantité positive

$$\mathrm{M}\left\{1:\left[\left(1-\frac{\xi}{\delta'}\right)\left(1-\frac{\eta}{\delta'}\right)\cdots\right]-1\right\}.$$

Cette expression tendant évidemment vers zéro, en même temps que ξ, η, ... simultanément, restera inférieure à ϑ pour toutes valeurs de ces modules inférieures à une certaine quantité positive d que l'on peut assigner.

Cela posé, le développement de la fonction composée par la série de Maclaurin a des rayons de convergence au moins égaux à d. Effectivement, la substitution des sommes des séries (5) à u, v, ... respectivement transforme la série (4) en une autre dont le terme général est la série entière en $x, y, \ldots$ résultant (116, VII) du développement de

$$(6)\qquad k_{\mathrm{M,N},\ldots}[\Sigma(a_{m,n,\ldots}x^m y^n\ldots)]^{\mathrm{M}}[\Sigma(b_{m,n\ldots}x^m y^n\ldots)]^{\mathrm{N}}\ldots$$

et dont la somme des modules des termes

$$\operatorname{mod} k_{\mathrm{M,N},\ldots}\times[\Sigma(\alpha_{m,n,\ldots}\xi^m\eta^n\ldots)]^{\mathrm{M}}[\Sigma(\beta_{m,n,\ldots}\xi^m\eta^n\ldots)]^{\mathrm{N}}\ldots$$

est inférieure à

$$(7)\qquad \operatorname{mod} k_{\mathrm{M,N},\ldots}\times\vartheta^{\mathrm{M}}\vartheta^{\mathrm{N}}\ldots,$$

dès que ξ, η, ... sont inférieurs à d. Or les quantités (7) forment une série convergente, parce qu'elles sont précisément les modules des termes de la série (4), pour des valeurs de $u, v, \ldots$ ayant des modules égaux à ϑ, ϑ, ... et par suite inférieurs à ses rayons

de convergence. Il en résulte que pour des valeurs de $x, y, \ldots$ dont les modules sont inférieurs à d, les séries partielles analogues au développement de (6) restent convergentes, quand à chaque terme on y substitue son module, ce que nous savions déjà, puisque les sommes de ces diverses séries de modules forment elles-mêmes une série convergente. On peut donc appliquer le théorème du n° 107 à la série qui a pour termes les développements des expressions (6), et la transformer en une autre procédant suivant les termes élémentaires même de ces développements, rangés et groupés arbitrairement, en particulier en une série entière par rapport à $x, y, \ldots$; c'est précisément ce qu'il fallait constater.

Pour établir la possibilité du développement de la fonction composée à partir de $x_0, y_0, \ldots$, valeurs initiales quelconques de x, $y, \ldots$, le raisonnement est le même, à cela près que les séries (5) sont remplacées par d'autres entières en $(x - x_0)$, $(y - y_0)$, ... fournissant le développement des excès

$$U(x, y, \ldots) - U(x_0, y_0, \ldots),\quad V(x, y, \ldots) - V(x_0, y_0, \ldots),\quad \ldots,$$

et qu'à la série (4) il faut substituer celle en $(u - u_0)$, $(v - v_0)$, ... fournissant le développement de la composante à partir des valeurs initiales $u_0 = U(x_0, y_0, \ldots)$, $v_0 = V(x_0, y_0, \ldots)$, ... On trouvera toujours d pour limite inférieure commune des olomètres de la fonction composée, parce que cette quantité dépend uniquement de M, δ, ϑ et nullement des valeurs initiales considérées pour x, $y, \ldots, u, v, \ldots$.

248. Ce théorème une fois obtenu, celui du n° 201 fournit immédiatement les plus grands rayons de convergence du développement de la fonction composée, cela d'après la configuration des aires S_x, S_y, ..., les positions qu'y occupent les valeurs initiales de $x, y, \ldots$ et d'une manière sensiblement indépendante de la grandeur de la quantité d ci-dessus, dont par suite il n'y a pas à se préoccuper. En outre, *l'observation générale faite au n° 203 étend sa validité au cas où ces aires seraient illimitées en tout ou en partie.*

Nous abrégerons son énoncé en disant simplement qu'*une fonction composée reste localement olotrope aussi longtemps que*

les fonctions simples et la composante le demeurent toutes elles-mêmes.

On retiendra soigneusement que *les formules générales de la théorie des fonctions composées supposent toutes la réalisation préalable des conditions sous lesquelles il subsiste.*

249. Il résulte du même théorème qu'*une fonction composée entre dans une phase critique* (**146**) *seulement quand il se présente une phase singulière* (**144**) (**145**) *pour une ou plusieurs des fonctions* (*simples ou composante*) *qui concourent à sa génération,* c'est-à-dire dans des cas que la nature spéciale de ces diverses fonctions permet toujours d'assigner *a priori*. La résolution de cette phase critique ne peut s'opérer qu'en faisant intervenir les propriétés spécifiques de ces fonctions, et elle donne des résultats variables avec les circonstances.

S'il s'agit, par exemple, des fonctions simples

$$U(x) = x^{-p}, \qquad V(x) = x^{-q}$$

se trouvant dans des phases singulières pour $x = 0$ (**151**), et de la composante

$$f(u, v) = \frac{u^{\pm\mu}}{v^{\pm\nu}},$$

s'y trouvant aussi pour u, v infinies, la fonction composée

$$F(x) = \frac{x^{\mp\mu p}}{x^{\mp\nu q}} = x^{\mp\mu p \pm \nu q}$$

entre pour $x = 0$ dans une phase critique se résolvant en une phase singulière ou ordinaire, selon que l'entier $\mp \mu p \pm \nu q$ est négatif ou non.

250. Voici les premiers corollaires du théorème fondamental dont nous nous occupons.

I. *Quand soit la composante, soit les fonctions simples se réduisent à des polynômes entiers, la fonction composée reste olotrope aussi longtemps que le sont elles-mêmes les fonctions simples dans le premier cas, la composante dans le second;* car les polynômes entiers sont indéfiniment olotropes (**150**).

II. *L'inverse arithmétique d'une fonction simple est olotrope, tant que celle-ci reste olotrope sans s'évanouir.*

Car cette fonction composée, $\frac{1}{U(x, y, \ldots)}$, a pour composante la fonction fractionnaire simple $\frac{1}{u}$ qui est olotrope pour toute valeur de u non $= 0$ (153).

III. *Le rapport* $\frac{U(x, y, \ldots)}{V(x, y, \ldots)}$ *de deux fonctions olotropes jouit de cette propriété pour toutes les valeurs des variables qui n'annulent pas son dénominateur.*

Car on peut le considérer comme une fonction composée de la composante entière uv et des deux fonctions simples

$$U(x, y, \ldots), \quad \frac{1}{V(x, y, \ldots)}$$

qui sont toutes deux olotropes, la première par hypothèse, la seconde comme inverse d'une fonction olotrope qui ne s'évanouit pas (I), (II).

Ce rapport entre dans une phase critique pour les systèmes de valeurs de $x, y, \ldots$ qui satisfont à l'équation $V(x, y, \ldots) = 0$.

Si le numérateur ne s'annule pas, cette fonction composée est infinie, partant non olotrope.

S'il s'annule, il faut une discussion spéciale que nous ferons dans notre deuxième Partie pour le cas d'une seule variable. Ici, nous remarquerons seulement que dans le cas de plusieurs variables le rapport considéré peut varier de toutes les manières possibles; telle est, par exemple, la fonction $\frac{y}{x}$ pour x et y toutes deux infiniment petites.

IV. *Une fonction rationnelle est olotrope pour toutes les valeurs des variables qui n'annulent pas son dénominateur;* car elle est un rapport de deux fonctions qui sont entières et, par suite, indéfiniment olotropes (III).

V. *Une fonction rationnelle de fonctions simples toutes olotropes jouit de cette propriété tant que son dénominateur ne s'évanouit pas;* car les valeurs des variables qui annulent le déno-

minateur sont les seules pouvant correspondre à celles pour lesquelles la composante peut cesser de l'être (IV).

251. On suit par cheminement la valeur d'une fonction composée dont la composante et les fonctions simples sont seulement localement olotropes (175, IV), en construisant d'abord les chemins parcourus simultanément par les valeurs des fonctions simples pour les marches données de leurs variables x, y, ..., puis en faisant décrire ces mêmes chemins aux variables de la composante. Il faut seulement prendre les côtés des chemins suivis par x, y, ... assez petits pour que les modules des accroissements des fonctions simples restent inférieurs aux olomètres de la composante.

252. Pour les fonctions composées remplissant les conditions du numéro précédent, les observations faites au n° 177 entraînent celles-ci qui sont très importantes.

I. *On a identiquement*

$$F(x, y, \ldots) = f[U(x, y, \ldots), V(x, y, \ldots), \ldots] = 0$$

pendant toute la durée des cheminements praticables, si l'on sait seulement que cette identité a lieu quand x, y, ... restent dans les limites de convergence du premier développement de cette fonction composée.

II. *On a identiquement*

$$F(x, y, \ldots) = {}'F(x, y, \ldots)$$

dans les mêmes circonstances, si l'on sait seulement que cette identité a lieu entre les premiers développements de ces deux fonctions composées.

Différentiation des fonctions composées.

253. Quand les conditions sous lesquelles nous avons énoncé le théorème du n° 247 sont remplies, ce que nous supposerons toujours expressément, le calcul des dérivées de tous ordres de la

fonction composée ne présente aucune difficulté théorique. Il suffit effectivement de développer les accroissements des fonctions simples par la série de Taylor

$$(1)\quad \begin{cases} \Delta U = \sum \dfrac{d^{m+n+\ldots}U}{dx^m\, dy^n \ldots} \dfrac{h^m}{1.2\ldots m} \dfrac{k^n}{1.2\ldots n} \cdots, \\ \Delta V = \sum \dfrac{d^{m+n+\ldots}V}{dx^m\, dy^n \ldots} \dfrac{h^m}{1.2\ldots m} \dfrac{k^n}{1.2\ldots n} \cdots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

de les substituer à ceux de u, v, ... dans le développement semblable de la composante

$$(2)\quad f(u+\Delta u,\ v+\Delta v,\ \ldots) = \sum \frac{d^{M+N+\ldots}f}{du^M\, dv^N \ldots} \frac{\Delta u^M}{1.2\ldots M} \frac{\Delta v^N}{1.2\ldots N} \cdots$$

et de multiplier par les facteurs numériques convenables (162) les coefficients des divers monômes entiers en h, k, ... dans le résultat développé et ordonné par rapport à ces accroissements.

La structure des formules ainsi obtenues est évidemment indépendante des natures spéciales, soit des fonctions simples, soit de la composante.

254. En tenant compte de ce que les séries (1) ne contiennent pas de termes indépendants de h, k, ..., on aperçoit cette loi générale avec moins de peine qu'il n'en faudrait pour suivre notre raisonnement si nous ne le supprimions pas.

Une dérivée d'ordre total K *de la fonction composée est toujours un polynôme entier par rapport à celles, soit de la composante, soit des fonctions simples, dont les ordres sont égaux ou inférieurs à* K.

Ce polynôme est essentiellement linéaire et homogène par rapport aux dérivées de la composante, mais son degré, par rapport à celles des fonctions simples, peut atteindre l'entier K *sans toutefois le surpasser.*

255. Nous appliquerons cette méthode directe au cas seulement où la composante se réduit au produit $uvw\ldots$ et où les fonctions simples ne dépendent toutes que d'une seule et même variable x. Pour avoir la dérivée d'ordre K de $U(x)V(x)W(x)\ldots$, il suffit

alors de multiplier par $1.2\ldots K$ le coefficient de h^K dans le produit des développements

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} U(x+h) &= \sum \frac{d^m U}{dx^m}\,\frac{h^m}{1.2\ldots m},\\ V(x+h) &= \sum \frac{d^m V}{dx^m}\,\frac{h^m}{1.2\ldots m},\\ W(x+h) &= \sum \frac{d^m W}{dx^m}\,\frac{h^m}{1.2\ldots m},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

effectué conformément à la règle du n° 110, puis ordonné par rapport à h. On trouve immédiatement ainsi

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} &D^K(UVW\ldots)\\ &\quad = \sum_{p,q,r,\ldots} \frac{1.2\ldots K}{1.2\ldots p.1.2\ldots q.1\ldots r\ldots}\,\frac{d^pU}{dx^p}\,\frac{d^qV}{dx^q}\,\frac{d^rW}{dx^r}\cdots, \end{aligned}\right.$$

la sommation étant étendue, comme dans le binôme de Newton, à tous les systèmes distincts de solutions en entiers positifs ou nuls, de l'équation indéterminée

$$p+q+r+\ldots = K.$$

Cette formule, qui est quelquefois fort utile, se déduirait encore, mais plus péniblement, de ce que nous allons dire sur le calcul des dérivées premières, par la méthode générale *des vérifications successives* déjà employée au n° 121 dans un cas tout différent.

256. Les raisons qui ont porté les géomètres à concevoir plus volontiers une dérivée d'ordre supérieur comme résultant de plusieurs différentiations du premier ordre exécutées consécutivement (163) leur ont fait, dans la pratique, préférer à la méthode générale ci-dessus indiquée (253) l'emploi répété d'une formule très simple permettant d'écrire immédiatement les dérivées premières d'une fonction composée. Ce procédé est d'autant plus avantageux, qu'on a rarement à exécuter des différentiations d'ordres bien élevés.

En se bornant, comme de raison (156), au cas d'une seule variable x, *la dérivée première de la fonction composée*

$$F(x) = f[U(x),\ V(x),\ W(x),\ \ldots]$$

est donnée par la formule

$$\frac{dF}{dx} = \frac{df}{du}\frac{dU}{dx} + \frac{df}{dv}\frac{dV}{dx} + \frac{df}{dw}\frac{dW}{dx} + \ldots, \tag{5}$$

où il faut naturellement faire dans $\frac{df}{du}, \frac{df}{dv}, \frac{df}{dw}, \ldots$ *les substitutions* $u = U(x)$, $v = V(x)$, $w = W(x)$, ...

Cette dérivée est effectivement égale au coefficient de h dans la série obtenue en substituant à Δu, Δv, ... dans le développement (2), les séries (3) *privées de leurs premiers termes.* Comme alors tous les termes restant dans ces séries contiennent h en facteur, les termes en Δu, ou Δv, ou ... du développement (2) donneront seuls dans le résultat des termes où h n'entrera pas avec un exposant > 1. On trouvera donc le terme en h dans le résultat ordonné et réduit, en ajoutant les produits obtenus en multipliant respectivement les termes en h des séries (3) par $\frac{df}{du}, \frac{df}{dv}, \cdots$ coefficients de Δu, Δv, ... dans le développement (2), ce qui conduit bien à notre formule (5).

257. En vertu de cette formule, une dérivée première quelconque d'une fonction composée de plusieurs variables est une certaine fonction entière des dérivées premières des fonctions simples et de la composante, c'est-à-dire une nouvelle fonction composée à composante entière, de fonctions dont nous savons calculer les dérivées. Si donc on l'applique une seconde fois par rapport à x ou à y, ..., on trouvera telle dérivée seconde que l'on voudra de la fonction composée considérée. On passera de la même manière aux dérivées du troisième ordre, et ainsi de suite.

On retrouvera facilement, en opérant de cette manière et en employant la méthode des *vérifications successives,* la loi générale signalée au n° **254**.

258. L'application de la formule (5) à des fonctions composées formées avec les composantes rationnelles les plus simples conduit à des règles de différentiation dont on fait un usage continuel.

I. *Composante linéaire et homogène*

$$f(u, v, \ldots) = au + bv + cw + \ldots.$$

On a (**157**, 3°)

$$\frac{df}{du} = a, \quad \frac{df}{dv} = b, \quad \frac{df}{dw} = c, \quad \ldots,$$

d'où

$$\frac{d}{dx}(a\mathrm{U} + b\mathrm{V} + c\mathrm{W} + \ldots) = a\frac{d\mathrm{U}}{dx} + b\frac{d\mathrm{V}}{dx} + c\frac{d\mathrm{W}}{dx} + \ldots,$$

c'est-à-dire *la même fonction linéaire et homogène des dérivées semblables des fonctions simples.*

La dérivée du produit d'une fonction donnée par une constante est le produit, par cette constante, de la dérivée de cette fonction.

La dérivée d'une somme ou d'une différence est égale à la somme ou à la différence des dérivées, etc. (*Cf.* **166**).

II. *Composante* $f(u, v, w, \ldots) = uvw\ldots$.

On a

$$\frac{df}{du} = vw\ldots, \quad \frac{df}{dv} = uw\ldots, \quad \frac{df}{dw} = uv\ldots,$$

d'où

$$\frac{d}{dx}(\mathrm{UVW}\ldots) = \frac{d\mathrm{U}}{dx}\mathrm{VW}\ldots + \mathrm{U}\frac{d\mathrm{V}}{dx}\mathrm{W}\ldots + \mathrm{UV}\frac{d\mathrm{W}}{dx}\ldots + \ldots.$$

On retombe sur la formule (4) écrite pour $\mathrm{K} = 1$.

III. *Composante* $f(u) = u^{\varpi}$, *l'entier* ϖ *étant positif ou négatif.*

On a (**157**, 2°)

$$\frac{df}{du} = \varpi u^{\varpi - 1},$$

d'où

$$\frac{d}{dx}\mathrm{U}^{\varpi} = \varpi \mathrm{U}^{\varpi - 1}\frac{d\mathrm{U}}{dx}.$$

Si $\varpi > 0$, cette formule coïncide avec celle de l'alinéa précédent pour un produit de ϖ fonctions simples égales à $\mathrm{U}(x)$. Pour $\varpi = -1$, elle se réduit à

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{\mathrm{U}} = -\frac{1}{\mathrm{U}^2}\frac{d\mathrm{U}}{dx}.$$

IV. *Composante* $f(u, v) = \frac{u}{v}$.

On a (157, 2°, 3°)

$$\frac{df}{du} = \frac{1}{v}, \quad \frac{df}{dv} = -\frac{u}{v^2},$$

il en résulte

$$\frac{d}{dx}\frac{U}{V} = \frac{1}{V}\frac{dU}{dx} - \frac{U}{V^2}\frac{dV}{dx} = \frac{V\frac{dU}{dx} - U\frac{dV}{dx}}{V^2}.$$

V. *Composante*

$$f(u_1, \ldots) = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & \ldots \\ u_2 & v_2 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix},$$

déterminant d'ordre quelconque q, *des* q^2 *variables* $u_1, v_1, \ldots, u_2, v_2, \ldots, \ldots$.

Le développement du même déterminant des fonctions simples

$$\begin{vmatrix} U_1 & V_1 & \ldots \\ U_2 & V_2 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}, \tag{6}$$

puis la différentiation de ses termes, exécutée comme ci-dessus (II), puis enfin des groupements évidents des résultats de ces opérations conduisent immédiatement à cette règle : *Pour former la dérivée du déterminant* (6), *il suffit d'y remplacer tour à tour chaque ligne* (*ou bien chaque colonne*) *par la file correspondante des dérivées de ses éléments, et d'ajouter les q déterminants ainsi obtenus.*

259. Quand on rencontre l'intégrale définie (8) du n° 231, ses limites x_0, X sont quelquefois des fonctions de la variable paramétrique x', ce qui fait d'elle une fonction composée de x'. Pour la différentier, il faut alors ajouter à la différence (10) du n° 232 les produits par $\frac{dX}{dx'}$ et $\frac{dx_0}{dx'}$ des dérivées de l'intégrale, prises par rapport à X et x_0, qui sont $f(X, x')$ et $-f(x_0, x')$ (228).

La formule (9) du n° 232 se trouve alors remplacée par

$$\frac{d}{dx'}\int_{x_0}^{X} f(x, x')\,dx = \int_{x_0}^{X} \frac{df(x, x')}{dx'}\,dx + f(X, x')\frac{dX}{dx'} - f(x_0, x')\frac{dx_0}{dx'}.$$

259 *bis*. On simplifie habituellement l'écriture en représentant par les mêmes lettres les variables indépendantes de la composante et les fonctions simples qui doivent leur être respectivement substituées. En même temps, nous éviterons certaines confusions en réservant le caractère ∂ pour la notation des dérivées de la composante.

De cette manière $f(u, v, \ldots)$ représentera aussi bien une fonction composante que la fonction composée naissant de la substitution de $U(x), V(x), \ldots$ à $u, v, \ldots$; et, au lieu de la formule (5), on écrira simplement

$$\frac{dF}{dx} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{dv}{dx} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{dw}{dx} + \ldots.$$

Beaucoup d'auteurs emploient le caractère d ou bien ∂, selon qu'il s'agit de noter les dérivées d'une fonction (simple) à *une seule* ou à *plusieurs* variables indépendantes; mais nous n'apercevons aucune utilité à cette distinction.

Intégration des fonctions composées.

260. La différentiation des fonctions composées vient de nous conduire à une classe d'expressions que l'on rencontre à chaque instant et dont il importe que nous donnions une définition générale.

Étendant les notions posées au commencement de ce Chapitre, nous appellerons *fonction composée différentielle* toute fonction composée proprement dite de variables indépendantes données, de fonctions de celles-ci et aussi de diverses dérivées de ces dernières. A ces mêmes dernières nous conserverons le nom de fonctions *simples,* et celui de *composante* à la fonction dont on a ainsi remplacé les variables primitives par les variables indépendantes définitives et par les fonctions simples accompagnées de quelques-unes de leurs dérivées.

L'*ordre* d'une fonction composée différentielle, par rapport à telle de ses fonctions simples, est le plus élevé des ordres totaux des dérivées de cette dernière qui entrent effectivement dans la

fonction composée dont il s'agit. Par exemple,

$$f\left(x, \mathrm{U}, \frac{d\mathrm{U}}{dx}, \ldots, \frac{d^p\mathrm{U}}{dx^p}, \mathrm{V}, \frac{d\mathrm{V}}{dx}, \ldots, \frac{d^q\mathrm{V}}{dx^q}\right)$$

est une fonction composée différentielle, de composante f et d'ordres p, q par rapport aux deux fonctions simples U, V de la seule variable x.

On peut considérer les fonctions composées proprement dites comme des fonctions composées différentielles mais d'ordres tous $=0$ par rapport aux diverses fonctions simples. Par opposition, on les nomme aussi des fonctions composées *finies*.

D'après cette définition, les dérivées d'une fonction composée finie se présentent sous forme de fonctions composées différentielles des fonctions simples, dont les ordres sont égaux à ceux des différentiations génératrices (**254**). Mais, par rapport aux dérivées elles-mêmes des fonctions simples, leurs composantes sont essentiellement entières et particularisées en outre par des traits spéciaux.

261. Comme les dérivées des fonctions simples sont olotropes aussi longtemps que celles-ci (**165**), il suffit encore pour que les théorèmes fondamentaux des nos **247**, **256**, **257** soient applicables à une fonction composée différentielle, que *ses fonctions simples et sa composante soient toutes olotropes.*

On notera avec soin que *toute différentiation première augmente de* 1 *l'ordre d'une fonction composée différentielle par rapport à toute fonction simple contenant effectivement la variable intéressée.*

262. Nous rencontrerons souvent des fonctions composées (finies ou différentielles) formées avec des composantes *déterminées* et des fonctions simples *indéterminées*, et nous aurons à utiliser les propositions suivantes :

Pour qu'une fonction composée différentielle (**260**)

$$(1) \qquad f\left(x, y, \ldots, \mathrm{U}, \frac{d\mathrm{U}}{dx}, \frac{d\mathrm{U}}{dy}, \ldots, \mathrm{V}, \frac{d\mathrm{V}}{dx}, \frac{d\mathrm{V}}{dy}, \ldots, \ldots\right)$$

de fonctions simples indéterminées U, V, ... *des variables*

indépendantes x, y, ... soit nulle identiquement, c'est-à-dire quelles que soient x, y, ... et aussi les fonctions prises pour U, V, ..., *il faut et il suffit que sa composante f le soit elle-même.*

Appelons M, N, ... les ordres de la fonction composée par rapport à U, V, ... respectivement, et

$$\mathfrak{u}(x, y, \ldots) = \sum \frac{\mathfrak{u}_0^{(p,q,\ldots)}}{1.2\ldots p.1.2\ldots q.1\ldots}(x-x_0)^p(y-y_0)^q\ldots, \quad (p+q+\ldots \leqq M),$$
$$\mathfrak{v}(x, y, \ldots) = \sum \frac{\mathfrak{v}_0^{(p,q,\ldots)}}{1.2\ldots p.1.2\ldots q.1\ldots}(x-x_0)^p(y-y_0)^q\ldots, \quad (p+q+\ldots \leqq N),$$
....

des polynômes de degré M, N, ... en $x - x_0$, $y - y_0$, ..., où les coefficients

$$(2) \qquad \begin{cases} \ldots, & \mathfrak{u}_0^{(p,q,\ldots)}, & \ldots \\ \ldots, & \mathfrak{v}_0^{(p,q,\ldots)}, & \ldots \\ \ldots, & \ldots\ldots, & \ldots \end{cases}$$

sont absolument indéterminés.

Il est évident que, pour $x, y, \ldots =$

$$(3) \qquad x_0, \quad y_0, \quad \ldots,$$

la fonction résultant de la substitution de ces polynômes entiers à U, V, ... respectivement prend la valeur

$$(4)\ f(x_0, y_0, \ldots, \mathfrak{u}_0^{(0,0,\ldots)}, \mathfrak{u}_0^{(1,0,\ldots)}, \mathfrak{u}_0^{(0,1,\ldots)}, \ldots, \mathfrak{v}_0^{(0,0,\ldots)}, \mathfrak{v}_0^{(1,0,\ldots)}, \mathfrak{v}_0^{(0,1,\ldots)}, \ldots, \ldots).$$

Si donc cette valeur est toujours nulle, l'expression (4) où les quantités (2), (3) seraient considérées comme autant de variables indépendantes, constitue une fonction identiquement nulle. Or cette fonction est précisément ce que nous appelons la *composante;* donc la condition posée est nécessaire ; il est évident d'ailleurs qu'elle est suffisante.

263. *Pour que deux fonctions composées telles que* (1) *soient égales identiquement, il faut et il suffit que leurs composantes le soient l'une à l'autre.* Car leur différence devant s'évanouir quelles que soient, et les fonctions simples mises à la place des

indéterminées u, v, ..., et les valeurs considérées des variables, sa composante, c'est-à-dire la différence de celles des fonctions composées considérées, doit être identiquement nulle (**262**).

264. *De quelque manière qu'elles aient été obtenues, deux expressions d'une même dérivée de nature donnée quelconque d'une fonction telle que* (1), *au moyen de* x, y, ..., *de* U, V, ... *et de leurs dérivées, sont nécessairement identiques* (c'est-à-dire sont égales identiquement quand on y considère un instant toutes ces quantités comme autant de variables indépendantes les unes des autres).

Effectivement, ces deux expressions sont aussi des fonctions composées différentielles de U, V, ..., que l'attribution à ces fonctions simples d'un même groupe quelconque de déterminations particulières rend nécessairement égales entre elles, quelles que soient les valeurs des variables indépendantes x, y, ... (**263**).

265. Voici maintenant l'énoncé général d'un problème dont des cas particuliers variés se posent fréquemment :

Trouver, s'il en existe, toutes les fonctions composées différentielles des fonctions simples indéterminées u, v, ... *des variables indépendantes* x, y, ..., *qui ont pour dérivées d'ordres partiels déterminés, des fonctions composées différentielles données des mêmes fonctions indéterminées* u, v, ...

Comme toute différentiation du premier ordre augmente de 1, relativement à la variable qu'elle intéresse, les ordres partiels les plus élevés des dérivées des fonctions simples figurant dans une fonction composée différentielle donnée (**261**), on obtiendra évidemment ces ordres partiels maximums pour la fonction inconnue, en retranchant respectivement des valeurs qu'ils ont dans les fonctions différentielles données celles qu'ils ont dans les différentiations devant transformer la fonction composée inconnue dans les fonctions composées données.

On écrira ensuite la fonction composée différentielle la plus générale de u, v, ..., où tous ces ordres partiels aient les valeurs ainsi trouvées; on développera ses diverses dérivées spécifiées dans

l'énoncé; puis, en vertu du lemme du n° **264**, on identifiera ces développements aux fonctions composées différentielles données. Cette opération fait connaître un certain nombre de dérivées partielles de la composante inconnue, dérivées desquelles il ne restera plus qu'à remonter à cette dernière en exécutant les intégrations expliquées aux n^{os} **221** et suivants.

Des conditions de deux sortes sont nécessaires à la possibilité du problème : il faut d'abord que l'identification soit possible; il faut ensuite que les intégrations soient exécutables, c'est-à-dire que certaines conditions d'intégrabilité soient remplies. Quand elles le sont, la solution générale du problème comporte les mêmes constantes et fonctions arbitraires de x, y, ... que si les fonctions composées différentielles données étaient remplacées par de simples fonctions de x, y, ...

266. Le cas le plus simple est celui *où les ordres partiels de la fonction composée inconnue, calculés comme nous l'avons dit, se réduisent tous à zéro,* c'est-à-dire où il s'agit de *trouver une fonction composée finie ayant pour dérivées d'ordres partiels déterminés des fonctions différentielles données* (*bien entendu de mêmes ordres partiels maximums*).

Soit alors $f(x, y, \ldots, u, v, \ldots)$ la fonction composée inconnue; les développements de ses dérivées spécifiées dans l'énoncé sont à l'égard des dérivées de u, v, ... par rapport à x, y, ..., de simples polynômes entiers ayant pour coefficients telles ou telles dérivées partielles de la composante f par rapport à ses propres variables x, y, ..., u, v, ... (**254**). Cette séparation absolue entre $x, y, \ldots, u, v, \ldots$ ne figurant que dans les coefficients de ces polynômes d'une part, et $\frac{du}{dx}, \frac{du}{dy}, \ldots, \frac{d^{m+n+\ldots}u}{dx^m\, dy^n \ldots}, \ldots, \frac{dv}{dx}, \ldots$ y jouant le rôle de quantités ordonnatrices d'autre part, rend l'identification exécutable à vue, soit négativement, soit affirmativement, et, dans ce dernier cas, elle fournit sans aucun calcul les dérivées partielles de f à soumettre aux intégrations finales.

267. Comme application d'ailleurs fort utile, cherchons la fonction composée finie $f(x, y, \ldots, u, v, \ldots)$ qui a les fonctions

composées différentielles du premier ordre données

$$(5)\qquad \begin{cases} \mathfrak{X}\left(x, y, \ldots, u, \dfrac{du}{dx}, \dfrac{du}{dy}, \ldots, v, \dfrac{dv}{dx}, \dfrac{dv}{dy}, \ldots\right), \\ \mathfrak{Y}\left(x, y, \ldots, u, \dfrac{du}{dx}, \dfrac{du}{dy}, \ldots, v, \dfrac{dv}{dx}, \dfrac{dv}{dy}, \ldots\right), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

pour dérivées premières par rapport à $x, y, \ldots$ respectivement.

Comme on a

$$\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{dv}{dx} + \ldots,$$
$$\frac{df}{dy} = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial u}\frac{du}{dy} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{dv}{dy} + \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

la possibilité de l'identification exige que les fonctions différentielles données (5) se réduisent aux formes

$$\mathrm{X} + \mathrm{U}\frac{du}{dx} + \mathrm{V}\frac{dv}{dx} + \ldots,$$
$$\mathrm{Y} + \mathrm{U}\frac{du}{dy} + \mathrm{V}\frac{dv}{dy} + \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

polynômes linéaires en $\frac{du}{dx}, \frac{dv}{dx}, \ldots, \frac{du}{dy}, \frac{dv}{dy}, \ldots$ ayant pour coefficients des fonctions de $x, y, \ldots, u, v, \ldots$ seulement; après quoi on aura

$$f(x, y, \ldots, u, v, \ldots) = \int(\mathrm{X}\,dx + \mathrm{Y}\,dy + \ldots + \mathrm{U}\,du + \mathrm{V}\,dv + \ldots)$$
$$= f_0(x, y, \ldots, u, v, \ldots) + \mathrm{C},$$

si toutefois la différentielle est exacte, $f_0(x, y, \ldots, u, v, \ldots)$ désignant quelque détermination particulière et C une constante arbitraire.

268. Cherchons encore la fonction composée finie $f(x, u)$ ayant

$$\mathfrak{X}\left(x, u, \frac{du}{dx}, \frac{d^2u}{dx^2}\right)$$

pour dérivée seconde par rapport à x.

Ici l'on a

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\,\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial u}\,\frac{du}{dx} + \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial u}\,\frac{d^2 u}{dx^2}.$$

Il faut donc que $\mathfrak{X}$ se réduise à

$$X_{2,0} + 2X_{1,1}\,\frac{du}{dx} + X_{0,2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + X_{0,1}\,\frac{d^2 u}{dx^2},$$

polynôme linéaire en $\frac{d^2 u}{dx^2}$, du second degré en $\frac{du}{dx}$, et dont les coefficients sont fonctions de x, u seulement. Si cette condition est remplie, l'identification est possible et donne

$$\frac{\partial f}{\partial u} = X_{0,1}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = X_{2,0}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial u} = X_{1,1}; \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} = X_{0,2},$$

équations différentielles à intégrer par les méthodes des n^{os} **221** et suivants.

Les conditions d'intégrabilité sont

$$\frac{dX_{0,1}}{dx} = X_{1,1}, \qquad \frac{dX_{0,1}}{du} = X_{0,2}, \qquad \frac{dX_{2,0}}{du} = \frac{dX_{1,1}}{dx};$$

si elles sont satisfaites, deux intégrations indéfinies donneront successivement

$$\frac{\partial f}{dx} = \int (X_{2,0}\,dx + X_{1,1}\,du) = X_{1,0} + C_{1,0},$$

$$f(x, u) = \int [(X_{1,0} + C_{1,0})\,dx + X_{0,1}\,du] = X_{0,0} + C_{1,0}\,x + C_{0,0},$$

formules où $X_{1,0}$, $X_{0,0}$ représentent des déterminations particulières des intégrales indéfinies que l'on choisira à volonté, et $C_{1,0}$, $C_{0,0}$, deux constantes arbitraires.

269. Dans le cas général du problème qui nous occupe, les intégrations ne se présentent pas autrement, mais l'identification est infiniment plus laborieuse, parce que, dans les expressions entre lesquelles il faut l'exécuter, les dérivées des fonctions simples indéterminées entrent non seulement d'une manière entière en dehors des dérivées partielles de la composante inconnue, mais

encore dans ces dérivées elles-mêmes. Nous nous contenterons de l'exemple suivant pour montrer comment les choses se passent.

On demande la fonction composée différentielle de la seule fonction simple indéterminée u de la variable x, qui a

$$\mathfrak{X}\left(x, u, \frac{du}{dx}, \frac{d^2u}{dx^2}, \ldots, \frac{d^ku}{dx^k}\right) \tag{6}$$

pour dérivée première.

Si k est bien l'ordre *effectif* de cette expression, c'est-à-dire si la dérivée partielle de la composante $\mathfrak{X}$ par rapport à celle de ses propres variables que $\frac{d^ku}{dx^k}$ a remplacée, n'est pas identiquement nulle, la supputation indiquée d'une manière générale au n° **265** donne $k - 1$ pour ordre effectif de la fonction composée inconnue, que nous représenterons en conséquence par

$$f(x, u, u', u'', \ldots, u^{(k-1)}),$$

en désignant par $u', u'', \ldots, u^{(k-1)}$, pour abréger, les dérivées de u, et par f la composante à trouver.

Comme dans

$$\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u}u' + \frac{\partial f}{\partial u'}u'' + \frac{\partial f}{\partial u''}u''' + \ldots + \frac{\partial f}{\partial u^{(k-1)}}u^{(k)}$$

$u^{(k)}$ entre linéairement, il faut, pour la possibilité de l'identification, que cette dérivée entre de la même manière dans l'expression donnée, et par suite que l'on ait

$$\mathfrak{X}(x, u, u', u'', \ldots, u^{(k)}) = X^{(k-1)} + U^{(k-1)}u^{(k)},$$

$X^{(k-1)}$, $U^{(k-1)}$ représentant certaines fonctions connues de

$$x, u, u', u'', \ldots, u^{(k-1)} \tag{7}$$

seulement que nous avons à considérer maintenant comme autant de variables indépendantes.

Si la condition est remplie, l'identification donne d'abord

$$\frac{\partial f}{\partial u^{(k-1)}} = U^{(k-1)}, \tag{8}$$

puis

$$(9)\qquad \frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial u}u'+\frac{\partial f}{\partial u'}u''+\ldots+\frac{\partial f}{\partial u^{(k-2)}}u^{(k-1)}=X^{(k-1)}.$$

Cette relation différentiée par rapport à $u^{(k-1)}$ devient

$$(10)\qquad \left\{\begin{aligned}&\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial u^{(k-1)}}+\frac{\partial^2 f}{\partial u\,\partial u^{(k-1)}}u'+\ldots\right.\\&\qquad\left.+\frac{\partial^2 f}{\partial u^{(k-2)}\,\partial u^{(k-1)}}u^{(k-1)}\right]+\frac{\partial f}{\partial u^{(k-2)}}=\frac{\partial X^{(k-1)}}{\partial u^{(k-1)}};\end{aligned}\right.$$

en ajoutant membre à membre les produits par 1, u', u'', ..., u^{k-1} des résultats de la différentiation de la relation (8) par rapport à x, u, u', ..., $u^{(k-2)}$ respectivement, on trouve

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial u^{(k-1)}}+\frac{\partial^2 f}{\partial u\,\partial u^{(k-1)}}u'+\ldots+\frac{\partial^2 f}{\partial u^{(k-2)}\,\partial u^{(k-1)}}u^{(k-1)}\\&\quad=\frac{\partial U^{(k-1)}}{\partial x}+\frac{\partial U^{(k-1)}}{\partial u}u'+\ldots+\frac{\partial U^{(k-1)}}{\partial u^{(k-2)}}u^{(k-1)},\end{aligned}$$

relation qui, retranchée de (10), laisse précisément

$$(11)\qquad \frac{\partial f}{\partial u^{(k-2)}}=\frac{\partial X^{(k-1)}}{\partial u^{(k-1)}}-\left[\frac{\partial U^{(k-1)}}{\partial x}+\ldots+\frac{\partial U^{(k-1)}}{\partial u^{(k-2)}}u^{(k-1)}\right]=U^{(k-2)},$$

ce dernier membre étant une fonction connue des variables (7). Moyennant quoi, la relation (9) donne

$$(12)\qquad \frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial u}u'+\ldots+\frac{\partial f}{\partial u^{(k-3)}}u^{k-2}=X^{(k-1)}-U^{(k-2)}u^{(k-1)}=X^{(k-2)},$$

ce dernier membre étant encore connu.

Il est clair maintenant qu'en opérant sur les relations (12), (11), comme nous venons de le faire sur (9), (8), on trouvera

$$(13)\qquad \left\{\begin{aligned}&\frac{\partial f}{\partial u^{(k-3)}}=U^{(k-3)},\\&\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial u}u'+\ldots+\frac{\partial f}{\partial u^{(k-4)}}u^{(k-3)}=X^{(k-3)},\end{aligned}\right.$$

puis de même

$$(14)\qquad \left\{\begin{aligned}&\frac{\partial f}{\partial u^{(k-4)}}=U^{(k-4)},\\&\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial u}u'+\ldots+\frac{\partial f}{\partial u^{(k-5)}}u^{(k-4)}=X^{(k-4)},\end{aligned}\right.$$

et ainsi de suite jusqu'à

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \mathrm{U}, \tag{15}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \mathrm{X}. \tag{16}$$

Cela posé, on déduit immédiatement des formules (16), (15), ..., (11), (8)

$$f[x, u, u', u'', \ldots, u^{(k-1)}] \\ = \int [\mathrm{X}\, dx + \mathrm{U}\, du + \mathrm{U}' du' + \ldots + \mathrm{U}^{(k-2)} du^{(k-2)} + \mathrm{U}^{(k-1)} du^{(k-1)}],$$

à condition, bien entendu, que la différentielle soit exacte.

Tous les autres cas ne diffèrent de celui-ci que par une complication de calculs qui croît d'une manière très rapide.

270. Aux considérations de ce genre se rattache l'*intégration par parties,* transformation employée à chaque instant, soit pour le calcul effectif de beaucoup d'intégrales indéfinies, soit pour la réduction à d'autres plus simples, de celles qu'on ne peut exprimer au moyen de fonctions antérieurement connues.

L'identité évidente

$$\int \mathrm{U} \frac{d\mathrm{V}}{dx}\, dx + \int \mathrm{V} \frac{d\mathrm{U}}{dx}\, dx = \int \left(\mathrm{U} \frac{d\mathrm{V}}{dx} + \mathrm{V} \frac{d\mathrm{U}}{dx} \right) dx = \mathrm{UV} + \mathrm{C}$$

donne immédiatement

$$\int \mathrm{U} \frac{d\mathrm{V}}{dx}\, dx = \mathrm{UV} - \int \mathrm{V} \frac{d\mathrm{U}}{dx}\, dx, \tag{17}$$

formule applicable à toute intégrale indéfinie où la fonction sous le signe $\int$ est décomposable en deux facteurs dont l'un se trouve être la dérivée d'une fonction connue.

271. La formule analogue

$$\int \mathrm{U} \frac{d^m \mathrm{V}}{dx^m}\, dx = \mathrm{U} \frac{d^{m-1} \mathrm{V}}{dx^{m-1}} - \frac{d\mathrm{U}}{dx} \frac{d^{m-2} \mathrm{V}}{dx^{m-2}} + \ldots \\ + (-1)^{m-1} \frac{d^{m-1} \mathrm{U}}{dx^{m-1}} \mathrm{V} - (-1)^{m-1} \int \mathrm{V} \frac{d^m \mathrm{U}}{dx^m}\, dx,$$

dont on a besoin quelquefois, s'établit en appliquant m fois la précédente (17) à l'intégrale considérée, ou bien en observant simplement que les dérivées de deux membres sont identiquement égales.

272. En remplaçant les intégrales indéfinies de la formule (17) par des déterminations particulières rendant les deux membres égaux quelle que soit x, on trouvera en marchant sur un même chemin d'intégration,

$$\int_{x_0}^{X} U \frac{dV}{dx} dx = [UV]_{x_0}^{X} - \int_{x_0}^{X} V \frac{dU}{dx} dx,$$

où la notation placée en tête du second membre représente l'excès, sur sa valeur initiale en x_0, de la valeur finale acquise par la fonction UV après le parcours du chemin d'intégration.

C'est *l'intégration par parties du calcul des intégrales définies*.

272 *bis*. Les questions qui ont été traitées dans ce paragraphe et dans le précédent, celles qui le seront dans les Chapitres suivants, sont de beaucoup les plus intéressantes de celles qui peuvent se poser à propos des fonctions composées. Mais il y en a bien d'autres, dans lesquelles il est toutefois inutile que nous nous engagions.

Séries ayant pour termes des fonctions olotropes d'un même groupe de variables indépendantes.

273. Les analogies nombreuses existant entre la *somme* d'une série convergente et une somme proprement dite de quantités en nombre limité rapprochent aussi des sommes ordinaires de fonctions simples les séries dont nous allons nous occuper, et assignent par suite à leur théorie une place toute naturelle à côté de celle des fonctions composées. En voici d'abord la première base.

Si les fonctions

$$f_1(x, y, \ldots), \quad f_2(x, y, \ldots), \quad \ldots, \quad f_n(x, y, \ldots), \quad \ldots$$

sont toutes olotropes dans les aires

(1) $$S_x, \quad S_y, \quad \dots$$

avec les mêmes olomètres

(2) $$\delta_x, \quad \delta_y, \quad \dots;$$

si, de plus, dans les aires (1) *accrues de zones additionnelles d'épaisseurs*

(3) $$\delta'_x, \quad \delta'_y, \quad \dots$$

inférieures aux quantités (2), *on peut assigner aux modules des valeurs de ces fonctions, des limites supérieures (indépendantes de* $x, y, \dots$*) formant une série convergente*

(4) $$M_1 + M_2 + \dots + M_g + \dots,$$

cas auquel la série

(5) $$f_1(x, y, \dots) + f_2(x, y, \dots) + \dots + f_g(x, y, \dots) + \dots$$

ne peut manquer de l'être aussi, la somme $F(x, y, \dots)$ *de cette même série est certainement olotrope dans les aires* (1) *avec des olomètres au moins égaux aux quantités* (3).

Développons $f_g(x, y, \dots)$ par la formule de Taylor à partir de valeurs initiales $x_0, y_0, \dots$ prises à volonté dans les aires (1); comme d'une part cette série entière en $x - x_0$, $y - y_0$, $\dots$ admet les rayons de convergence (2) supérieurs à (3), comme d'autre part le module de sa somme reste inférieur à M_g pour tous modules de ces différences égaux à ces dernières quantités, la somme des modules de ses termes, pour tous modules ξ, η, $\dots$ de ces mêmes différences pris au-dessous des quantités (3) est, d'après le théorème du n° 132, inférieure à

$$M_g : \left[\left(1 - \frac{\xi}{\delta'_x}\right)\left(1 - \frac{\eta}{\delta'_y}\right)\cdots\right].$$

Cette quantité est le terme général d'une série convergente, parce qu'on l'obtient en divisant celui de la série (4) qui est supposée l'être par un diviseur indépendant de g. Le théorème du n° 107 est donc applicable à la série de séries partielles, dans

laquelle se transforme la proposée (5) par le développement simultané de tous ses termes. Comme on peut ainsi déplacer et grouper arbitrairement les termes élémentaires de ces développements, on peut en particulier mettre $F(x, y, \ldots)$ sous forme d'une série entière en $(x - x_0)$, $(y - y_0)$, ... admettant les rayons de convergence (3); c'est précisément ce qu'il fallait prouver.

274. *Sous les mêmes conditions, on a, comme s'il s'agissait d'une somme de fonctions simples en nombre limité* (258, I),

$$\frac{d^{p+q+\ldots} F(x, y, \ldots)}{dx^p\, dy^q \ldots} = \sum_g \frac{d^{p+q+\ldots} f_g(x, y, \ldots)}{dx^p\, dy^q \ldots}.$$

Car on vient de voir que pour obtenir le coefficient de $h^p k^q \ldots$ dans le développement de $F(x+h, y+k, \ldots)$, il suffit de sommer les coefficients des termes semblables dans ceux de

$$f_1(x+h, y+k, \ldots), \quad f_2(x+h, y+k, \ldots), \quad \ldots.$$

275. Relativement à l'exécution du calcul inverse des dérivées sur de pareilles séries, on a des propositions analogues dont voici un type plus que suffisant pour nous; il fait pendant à l'intégration par décomposition (215, II).

Sous les conditions énumérées au n° 273, *en posant*

$$(6) \qquad F(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_g(x) + \ldots$$

et en représentant par $^{(K)}\!\int f(x)\, dx^K$ *le résultat de* K *intégrations indéfinies exécutées sur* $f(x)$, *on a aussi*

$$(7) \qquad {}^{(K)}\!\int F(x)\, dx^K = {}^{(K)}\!\int f_1(x)\, dx^K + \ldots + {}^{(K)}\!\int f_g(x)\, dx^K + \ldots,$$

pourvu que dans le second membre et pour une même valeur initiale x_0 *de* x, *tombant dans l'aire* S_x, *les valeurs initiales des intégrales indéfinies et de leurs dérivées d'ordres* 1, 2, ..., (K — 1) *forment* K *séries toutes convergentes.*

Si

$$a_0^{(g)} + a_1^{(g)}(x - x_0) + \ldots$$

est le développement de $f_g(x)$, celui de $\mathfrak{f}_g(x)$, détermination de $^{(K)}\!\int f_g(x)\, dx^K$ qui s'annule pour $x = x_0$, elle et ses (K — 1) pre-

mières dérivées, est

$$\frac{a_0^{(g)}}{1.2\ldots K}(x-x_0)^K + \frac{a_1^{(g)}}{2.3\ldots(K+1)}(x-x_0)^{K+1}+\ldots \qquad (215, \text{I});$$

et comme, en attribuant à $(x - x_0)$ un module $\xi < \delta'_x$, la somme des modules des termes du premier de ces développements est inférieure à

$$M_g : \left(1 - \frac{\xi}{\delta'_x}\right),$$

la même somme pour le second développement le sera à plus forte raison à

$$M_g \xi^K : \left(1 - \frac{\xi}{\delta'_x}\right),$$

terme général d'une série convergente, comme la quantité précédente l'était déjà.

En raisonnant donc comme au n° 273, on trouvera que la série

$$\mathfrak{f}_1(x) + \mathfrak{f}_2(x) + \ldots + \mathfrak{f}_g(x) + \ldots$$

est convergente, que sa somme $\mathfrak{F}(x)$ peut être mise sous forme d'une série entière en $x - x_0$ et qu'elle est précisément la détermination de ${}^{(K)}\!\int F(x)\,dx^K$ qui s'annule avec ses $K - 1$ premières dérivées pour $x = x_0$, car dans $\mathfrak{F}(x)$ le coefficient de $(x - x_0)^{m+K}$ est ainsi

$$\frac{1}{(m+1)(m+2)\ldots(m+K)}\left[a_m^{(1)} + a_m^{(2)} + \ldots + a_m^{(g)} + \ldots\right],$$

c'est-à-dire, en vertu de la relation (6), celui même du terme semblable dans le développement de la détermination dont il s'agit.

Si maintenant on appelle $U^{(0)}, U^{(1)}, \ldots, U^{(K-1)}$ les sommes des séries toutes convergentes par hypothèse

$$(8) \qquad \left\{ \begin{array}{l} u_1^{(0)} + u_2^{(0)} + \ldots + u_g^{(0)} + \ldots, \\ u_1^{(1)} + u_2^{(1)} + \ldots + u_g^{(1)} + \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_1^{(K-1)} + u_2^{(K-1)} + \ldots + u_g^{(K-1)} + \ldots, \end{array} \right.$$

que forment les valeurs initiales des intégrales du second membre de la formule (7), à elles-mêmes et à leurs dérivées d'ordre 1,

2, ..., (K — 1), on a

$$^{(K)}\int F(x)\,dx^K = U^{(0)} + U^{(1)}\frac{(x-x_0)}{1} + \ldots + U^{(K-1)}\frac{(x-x_0)^{K-1}}{1.2\ldots(K-1)} + \mathfrak{f}(x),$$

d'où résulte l'exactitude de la formule en question à cause de

$$^{(K)}\int f_g(x)\,dx^K = u_g^{(0)} + u_g^{(1)}\frac{(x-x_0)}{1} + \ldots + u_g^{(K-1)}\frac{(x-x_0)^{K-1}}{1.2\ldots(K-1)} + \mathfrak{f}_g(x).$$

Le cheminement étend ensuite la même relation à tout l'intérieur de l'aire S_x; car après chaque pas les valeurs finales des intégrales du second membre et de leurs dérivées d'ordres 1, 2, ..., (K — 1) forment K séries convergentes, et ce sont précisément elles qu'il faut prendre comme valeurs initiales pour faire le pas suivant.

Si les séries (8) restent convergentes quand on en réduit les termes à leurs modules (on peut évidemment toujours s'arranger de manière qu'il en soit ainsi), on aperçoit sans peine qu'au bout d'un même chemin quelconque tracé dans l'aire S_x les modules des valeurs des intégrales figurant dans la série (7) sont respectivement inférieurs à des quantités positives en série convergente. Si, de plus, ces intégrales sont toutes monodromes dans cette aire, partant olotropes à proprement parler, cette série y jouit encore des mêmes propriétés que la proposée (6).

Le cas particulier le plus utile de la formule (7) est

$$\int_{x_0}^{X} F(x)\,dx = \int_{x_0}^{X} f_1(x)\,dx + \ldots + \int_{x_0}^{X} f_g(x)\,dx + \ldots,$$

les intégrales définies étant toutes prises sur un même chemin tracé à l'intérieur de S_x.

275 *bis*. Les conditions posées ci-dessus (**273** *et suiv.*) sont de rigueur ([1]); mais quand les aires (1) peuvent subir une réduc-

---

([1]) L'exemple suivant fera bien ressortir l'utilité de celle qui peut paraître la moins nécessaire.

Comme on le verra dans la deuxième Partie de cet Ouvrage (Chapitres VI et VII), la fonction $\cos mx$, quel que soit l'entier m, est indéfiniment olotrope; pour x réelle, elle ne prend jamais que des valeurs réelles dont les valeurs absolues ne

tion à de moindres S'_x, S'_y, ..., par l'ablation de zones *soustractionnelles* d'épaisseurs non nulles, si faibles d'ailleurs qu'elles soient, les théorèmes précédents ont évidemment lieu dans les aires réduites, pourvu seulement que dans les proposées les fonctions f_1, f_2, ... aient des olomètres communs quelconques et que leurs modules s'y maintiennent au-dessous des termes correspondants de la série convergente (4). Les aires réduites différant des proposées aussi peu qu'on le veut, nous rappellerons ces théorèmes, tous fort précieux, dans ces termes inexacts mais bien plus brefs : *Si, dans des aires données, les termes de la série* (5) *sont tous olotropes et y conservent des modules inférieurs à ceux de quelque série convergente, sa somme y est olotrope et peut être différentiée ou intégrée terme à terme, comme celle d'une série entière* (157, 3°) (215, I), *comme une somme ordinaire de fonctions simples.*

---

surpassent pas 1 ; elle a pour dérivée seconde $-m^2 \cos mx$; on a enfin $\cos 0 = 1$; M désignant en outre quelque quantité positive > 1, la série à termes positifs

$$(a) \qquad \frac{M}{1^2} + \frac{M}{2^2} + \ldots + \frac{M}{m^2} + \ldots$$

est convergente.

Il en résulte que sur un segment quelconque de l'axe des quantités réelles, pris pour l'espace S_x du n° 273, les termes de la série

$$(b) \qquad \frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 2x}{2^2} + \ldots + \frac{\cos mx}{m^2} + \ldots$$

sont des fonctions olotropes ayant pour olomètre commun une quantité positive de grandeur arbitraire, qu'ils y conservent des modules respectivement inférieurs aux termes de la série (*a*), que par suite cette série (*b*) y est toujours convergente. Et cependant, si l'on voulait différentier deux fois sa somme (supposée olotrope) en opérant séparément sur ses différents termes, on obtiendrait la série

$$-\cos x - \cos 2x - \ldots - \cos mx - \ldots$$

qui est divergente pour $x = 0$ à cause de $\cos 0 = 1$.

Ce résultat, qui pourra surprendre certains lecteurs, tient à ce que, pour toute valeur $x' + ix''$ de x dont le second élément x'' n'est pas nul, $\cos mx$ est une quantité infinie pour m infini, si petite cependant que soit la valeur numérique de x''. On ne peut ainsi accroître l'espace S_x d'une zone additionnelle quelconque sans faire perdre aux modules des termes de la série (*b*) la propriété d'y rester inférieurs à des quantités positives indépendantes de x formant une série convergente. L'existence de cette propriété est donc une condition sans laquelle celle des propositions contenues dans ce paragraphe n'est pas certaine. On observera qu'ici l'espace S_x ne peut subir l'ablation d'aucune zone soustractionnelle.

Développement des fonctions rationnelles.

276. Nous avons vu (**250**, IV) qu'une fonction rationnelle mise sous forme d'une fraction ayant pour termes des polynômes entiers

$$\text{(1)} \qquad R(x, y, \ldots) = \frac{P(x, y, \ldots)}{p(x, y, \ldots)}$$

est olotrope aussi longtemps que son dénominateur ne s'évanouit pas. On peut prouver en outre, ce dont nous nous dispenserons pour abréger, qu'*elle cesse toujours de l'être pour les valeurs des variables qui annulent son dénominateur, à condition, bien entendu, que ses termes aient été débarrassés de tout facteur entier commun*. En la supposant donc réduite à sa plus simple expression, ce que nous ferons désormais, il résulte immédiatement de cette simple observation que $R(x+h, y+k, \ldots)$ *est développable par la formule de Taylor à partir seulement des systèmes de valeurs initiales qui ne donnent pas*

$$\text{(2)} \qquad p(x, y, \ldots) = 0,$$

et seulement aussi pour les modules de h, k, ..., *tels, que cette équation ne soit satisfaite pour aucun système de valeurs des variables tombant soit sur les circonférences, soit à l'intérieur des cercles ayant ces modules pour rayons et les valeurs initiales pour centres* (**201**).

La discussion de l'équation entière (2) fournit donc à la fois, et les valeurs initiales à partir desquelles le développement est possible, et ses rayons de convergence maximums.

Quand il y a plusieurs variables, cette équation est indéterminée et il est visible qu'en général les plus grands rayons de convergence ne sont pas déterminés *individuellement*; nous voulons dire que l'augmentation des uns peut être compatible avec la diminution des autres, fait particulier conforme à une indication générale donnée depuis longtemps (**119**), comme un autre du même genre que nous aurions pu signaler dès le n° **120**.

277. Le calcul des coefficients n'offre pas de difficultés *théo-*

riques, puisque nous savons différentier les polynômes entiers et les fractions dont les termes sont des fonctions connues (**258**, IV); mais les difficultés *pratiques* sont considérables pour peu qu'on s'éloigne dans le développement. La méthode des coefficients indéterminés (**216**) est bien préférable.

Supposons pour fixer les idées, et aussi parce que tous les autres cas se ramènent immédiatement à celui-ci, qu'il s'agisse de développer $R(x, y, \ldots)$ par la série de Maclaurin, les valeurs o, o, ... des variables ne satisfaisant pas, bien entendu, à l'équation (2). En se bornant au cas de deux variables et en appelant K, k les degrés effectifs (**29**) des termes de la fonction (1), on a

$$\begin{aligned}P(x,y) = P_{0,0} &+ (P_{1,0}x + P_{0,1}y) + \ldots\\ &+ (P_{K,0}x^K + P_{K-1,1}x^{K-1}y + \ldots + P_{0,K}y^K),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}p(x,y) = p_{0,0} &+ (p_{1,0}x + p_{0,1}y) + \ldots\\ &+ (p_{k,0}x^k + p_{k-1,1}x^{k-1}y + \ldots + p_{0,k}y^k),\end{aligned}$$

les coefficients $P_{0,0}, \ldots, p_{0,0}, \ldots$ étant connus, et

$$R(x,y) = R_{0,0} + (R_{1,0}x + R_{0,1}y) + \ldots, \tag{3}$$

les coefficients $R_{0,0}$, $R_{1,0}$, $R_{0,1}$, ... étant *à déterminer*.

On sait (**116**, II) que les modules des termes du développement de $R(x,y)$ forment une série convergente à l'intérieur des cercles de convergence; on peut donc multiplier ce développement par toute autre série entière convergente ou polynôme (**110**), en particulier par $p(x, y)$. Comme, en vertu de la relation de définition (1), on doit régénérer ainsi $P(x,y)$ identiquement, les divers coefficients du produit ordonné par rapport à x, y doivent être égaux respectivement à ceux des termes semblables dans $P(x, y)$, c'est-à-dire à $P_{0,0}$, $P_{1,0}$, ..., $P_{0,K}$ jusqu'au degré K, à o au delà (**137**).

En écrivant ces diverses égalités pour les termes de degrés o, 1, 2, ... successivement, on trouve entre $R_{0,0}$, $(R_{1,0}, R_{0,1})$, $(R_{2,0}, R_{1,1}, R_{0,2})$, ... une suite illimitée d'équations linéaires dans chacune desquelles figure visiblement, avec d'autres dont les deux indices donnent diverses sommes, *une seule inconnue* où cette somme a la valeur maximum. Cette inconnue d'ailleurs y a toujours pour coefficient la quantité $p_{0,0}$ qui n'est pas nulle à

cause de $p(0,0)$ non $= 0$. Les équations dont il s'agit se résolvent donc successivement dans l'ordre où nous les avons formées, chacune d'elles ne contenant, outre l'inconnue à plus grande somme d'indices, que d'autres dont les équations précédentes ont fourni les valeurs.

278. Les coefficients du développement (3) forment ainsi une suite *récurrente,* parce que le calcul de chacun d'eux comporte un *recours* aux précédents. Mais cette dénomination est plus exclusivement réservée à des suites sur lesquelles nous allons donner un peu plus de détails.

Dans le cas d'une seule variable x, la question se simplifie beaucoup. On a alors

$$P(x) = P_0 + P_1 x + \ldots + P_K x^K,$$
$$p(x) = p_0 + p_1 x + \ldots + p_k x^k,$$

et

$$(4) \qquad R(x) = R_0 + R_1 x + R_2 x^2 + \ldots.$$

Nous supposerons p_0 comme p_k non $= 0$ et aussi $K \gtreqless k - 1$, sauf à attribuer la valeur 0 à quelques-uns des derniers coefficients de $P(x)$ dans le cas où le degré effectif de $P(x)$ est $< k - 1$.

Les équations linéaires à résoudre successivement pour obtenir les valeurs de R_0, R_1, R_2, ... sont d'abord

$$(5) \qquad \left\{ \begin{array}{r} p_0 R_0 = P_0, \\ p_0 R_1 + p_1 R_0 = P_1, \\ p_0 R_2 + p_1 R_1 + p_2 R_0 = P_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ p_0 R_K + p_1 R_{K-1} + \ldots\ldots\ldots\ldots = P_K; \end{array} \right.$$

elles sont ensuite indéfiniment

$$(6) \qquad p_0 R_m + p_1 R_{m-1} + \ldots + p_k R_{m-k} = 0,$$

pour toute valeur $> K$ de l'indice m.

En vertu de cette relation, *la somme des produits par les $k + 1$ constantes*

$$(7) \qquad p_0, p_1, \ldots, p_k,$$

de $k + 1$ coefficients consécutifs de la série (4) *écrits dans*

l'ordre inverse finit par conserver la valeur o. C'est ce qui a fait donner à ce développement le nom de série *récurrente,* et à l'ensemble des quantités (7) celui d'*échelle de relation.* La récurrence exprimée par l'équation indéfinie (6) est *immédiate* ou *retardée,* selon qu'elle commence à une valeur de m égale ou supérieure à k.

Une progression géométrique de raison x offre l'exemple le plus simple d'une série récurrente : l'échelle de relation s'y réduit à $+1, -1$.

279. Il est évident qu'une série récurrente *considérée en elle-même* est entièrement déterminée, quand on connaît, avec son échelle de relation (7) dont les termes extrêmes ne s'évanouissent pas, les valeurs $R_0, R_1, \ldots, R_K$ de ses coefficients, en nombre $K+1 \geqq k$, précédant le premier de ceux dont le calcul doit se faire par la résolution des équations (6). De plus, il est visible que, *quelles que soient ces données, une pareille série est toujours convergente pour des modules de x suffisamment petits, et que sa somme se réduit à une fonction rationnelle, dont le dénominateur $p(x)$ a pour coefficients les éléments de l'échelle de relation, dont le numérateur $P(x)$ a pour coefficients les valeurs des premiers membres des équations* (5).

Effectivement, si admettant provisoirement la convergence de cette série on en multiplie la somme par $p(x)$, on trouvera que les $K+1$ premiers coefficients du produit se réduisent aux premiers membres des équations (5) et tous les autres à o à cause de la récurrence (6). Mais, à cause de p_0 non $= 0$, la fonction rationnelle $\frac{P(x)}{p(x)}$ se développe en une série entière en x dont les coefficients sont liés précisément par les relations (5), (6). Donc la série récurrente considérée ne peut différer de ce développement.

280. *La décomposition des fractions rationnelles en fractions simples,* opération rattachée aux éléments, mais sur laquelle nous reviendrons dans notre deuxième Partie, permet de mettre sous une autre forme le terme général d'une série récurrente.

Une *fraction simple* est une fraction rationnelle ayant pour numérateur une constante, pour dénominateur une puissance d'un

binôme du premier degré, où il est évidemment permis de supposer $=1$ le coefficient de x; et, comme nous le reverrons, une fraction rationnelle quelconque $\frac{P(x)}{p(x)}$ peut être transformée en une fonction linéaire et homogène de fractions simples telles que

$$\frac{1}{(x-a)^q}, \tag{8}$$

où les constantes a sont les diverses racines de l'équation entière

$$p(x)=0 \tag{9}$$

et les exposants q, des entiers égaux ou inférieurs à leurs degrés de multiplicité. Quand K surpasse $k-1$, ces fractions simples sont accompagnées de certains monômes entiers dont l'ensemble reproduit précisément le quotient de la division algébrique de $P(x)$ par $p(x)$.

Cela posé, comme ici aucune des quantités a ne s'évanouit, parce qu'on a $p(0)$ non $=0$, la formule du n° 152, construite en prenant $x_0=-a$, $h=x$, $p=q$, donnera immédiatement le développement de la fraction simple (8), indépendamment de toute considération de récurrence. En formant donc la même fonction linéaire et homogène des termes généraux de ce développement et de ceux de toutes les fractions simples analogues, en réunissant aux premiers termes les monômes entiers pouvant provenir de la décomposition de la fonction rationnelle, on obtiendra le terme général de son développement.

Cette méthode particulière combinée avec ce que nous savons (151) sur la convergence des développements des fractions simples, fait immédiatement retrouver, pour rayon de convergence maximum du développement de notre fonction rationnelle, la valeur résultant des considérations générales du n° 276, savoir *le plus petit des modules des racines de l'équation* (9).



CHAPITRE X.

PRINCIPE ESSENTIEL DE LA THÉORIE DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES TOTALES.

Généralités.

281. Une *relation* entre des fonctions données d'un même groupe de variables est l'expression de l'égalité *identique*, c'est-à-dire quelles que soient les valeurs de ces dernières, de deux fonctions composées données, l'une ou l'autre finie ou différentielle (**260**), des fonctions dont il s'agit.

Comme d'habitude, on réduit le second membre à o, en faisant tout passer dans l'autre qui prend alors le nom de *premier membre*, lui-même ou souvent sa composante.

Selon que le premier membre ainsi défini est une fonction composée *finie* ou *différentielle* de tels et tels ordres, la relation elle-même prend ces divers noms.

282. Quand les fonctions simples intéressées dans une relation sont olotropes, ainsi que la composante de la fonction composée différentielle qui en constitue le premier membre, celle-ci a des dérivées de tous ordres, calculables par l'application des règles générales (**253** *et suiv.*); et toutes ces dérivées sont, comme elle, identiquement nulles (**187**).

D'une pareille relation finie ou différentielle donnée, on en déduit donc une infinité d'autres entre les mêmes fonctions, mais toutes différentielles, en égalant à o *les dérivées de tous ordres de son premier membre.*

La formation de ces nouvelles relations différentielles se nomme la *différentiation* de la relation primitive.

Il faut toujours être prêt à former et à utiliser ces relations accessoires provenant ainsi de la différentiation de relations don-

nées, et celles aussi qui naissent de leurs combinaisons variées.

Entre les fonctions

$$u = \frac{1}{x}, \qquad v = \frac{1}{1+x},$$

par exemple, il existe d'abord la relation finie

$$x^2 u + (1+x)v - 1 - x = 0,$$

puis les relations différentielles d'ordres 1, 2, ...

$$-1 + 2xu + v + x^2 \frac{du}{dx} + (1+x)\frac{dv}{dx} = 0,$$

$$2u + 4x\frac{du}{dx} + 2\frac{dv}{dx} + x^2\frac{d^2u}{dx^2} + (1+x)\frac{d^2v}{dx^2} = 0,$$

....,

puis enfin toutes les autres relations résultant des diverses combinaisons des précédentes.

283. Un *système d'équations finies ou différentielles* est la même chose qu'un système de relations proprement dites, à cela près que les fonctions u, v, ... qui s'y trouvent engagées sont inconnues, et qu'il s'agit précisément de trouver ce qu'elles doivent être pour que les relations données aient toutes lieu entre elles.

Quand toutes les équations considérées sont finies, le système est dit *fini;* les fonctions qui satisfont à ses équations se nomment les *solutions,* souvent les *racines* du système. Nous devons attendre le Chapitre suivant pour parler de la *résolution* des systèmes de cette espèce.

Quand ces équations sont différentielles en tout ou en partie, les solutions du système s'en nomment les fonctions *intégrales* (*Cf.* **209**, II *et suiv.*).

Les solutions d'un système fini peuvent être des fonctions quelconques, mais *les intégrales d'un système d'équations différentielles ne peuvent être conçues autrement qu'olotropes,* entre certaines limites tout au moins. Effectivement, puisque leurs dérivées jouent un rôle dans la question, il faut que ces fonctions aient des dérivées; or nos définitions (**155** *et suiv.*) n'en attribuent normalement qu'aux fonctions olotropes (*Cf.* **207**).

284. L'*intégration* d'un système d'équations différentielles est l'opération consistant à trouver toutes ses intégrales, ce qui veut dire tantôt les exprimer au moyen des fonctions que l'on connaissait avant de s'occuper du système, tantôt, quand cela ne se peut, les étudier et les classer méthodiquement.

Ce problème a pour cas particuliers les plus simples toutes les questions traitées dans le Chapitre VIII; car la condition pour une fonction inconnue d'avoir certaines dérivées égales à des fonctions données des variables indépendantes, s'exprime par de véritables équations différentielles dont les premiers membres sont formés chacun par une dérivée seulement de la fonction inconnue, dont les seconds membres ne contiennent jamais ni cette fonction inconnue ni ses dérivées. Envisagé dans toute sa généralité, il est à coup sûr le plus vaste et le plus important de tous ceux de l'Analyse. L'intégration des équations différentielles a fait découvrir la plupart des nouvelles fonctions transcendantes; elle a procuré après coup la conception analytique la plus naturelle et la plus satisfaisante, même du petit nombre de celles qui avaient pu être aperçues indépendamment d'elle, comme les fonctions circulaires et les logarithmes; elle fournira bientôt une base solide à notre théorie des équations finies. Enfin elle est habituellement la voie la plus aisée par laquelle on puisse déduire les lois mathématiques des phénomènes naturels, de faits accessibles à l'observation et faciles à combiner par le raisonnement. Par exemple, il serait impossible de découvrir par l'observation directe la forme du chemin que suit la lumière en se propageant dans l'atmosphère; mais les lois de la réfraction dans les cas les plus simples permettent d'écrire immédiatement l'équation différentielle de la trajectoire lumineuse, d'où l'on remonte par intégration à l'équation proprement dite de cette ligne.

285. *Un système quelconque d'équations différentielles peut être remplacé par un autre où aucune des dérivées des fonctions inconnues ne passe le premier ordre.*

Supposons, en effet, que, dans le système considéré, les dérivées de u atteignent l'ordre $k > 1$.

En posant

$$(1) \qquad \frac{du}{dx} = u'_x, \quad \frac{du}{dy} = u'_y, \quad \dots,$$

on aura évidemment

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{du'_x}{dx}, \quad \frac{d^2u}{dx\,dy} = \frac{du'_x}{dy} = \frac{du'_y}{dx}, \quad \frac{d^2u}{dy^2} = \frac{du'_y}{dy}, \quad \dots,$$
$$\frac{d^3u}{dx^3} = \frac{d^2u'_x}{dx^2}, \quad \frac{d^3u}{dx^2\,dy} = \frac{d^2u'_x}{dx\,dy} = \frac{d^2u'_y}{dx^2}, \quad \dots\dots\dots,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

ce qui permet de remplacer partout les dérivées de u d'ordres supérieurs au premier par des dérivées de u'_x, u'_y, ... d'ordres tous moindres d'une unité respectivement. En faisant donc ces substitutions après avoir adjoint à u, v, ... les nouvelles fonctions inconnues u'_x, u'_y, ..., au système proposé les équations (1), on remplacera ce système par un autre dans lequel v, ... entreront aux mêmes ordres, u au premier, où les dérivées de u'_x, u'_y, ... atteindront l'ordre $k - 1$ seulement, et dont les intégrales représentées par les lettres u, v, ... coïncident certainement avec celles du proposé.

En opérant comme nous venons de le faire pour u, sur u'_x, u'_y, ..., puis sur les nouvelles fonctions inconnues successivement adjointes, on arrivera à un système qui sera du premier ordre par rapport à toutes les fonctions inconnues autres que v, ... En faisant enfin pour v, ... ce que nous venons d'expliquer pour u, on achèvera la transformation du système proposé dont il fallait établir la possibilité.

Par exemple, toute intégrale de l'équation différentielle unique du troisième ordre

$$f\left(x, u, \frac{du}{dx}, \frac{d^2u}{dx^2}, \frac{d^3u}{dx^3}\right) = 0,$$

pourra s'obtenir en prenant quelque intégrale u du système du premier ordre par rapport aux trois fonctions inconnues u, u', u'',

$$\left\{\begin{aligned} \frac{du}{dx} &= u', \\ \frac{du'}{dx} &= u'', \\ f\left(x, u, u', u'', \frac{du''}{dx}\right) &= 0. \end{aligned}\right.$$

Ce sont des réductions de ce genre que nous avons exécutées au fond, quand nous avons décomposé en intégrations de différentielles du premier ordre celles de différentielles d'ordres plus élevés (les unes et les autres totales ou incomplètes) (Chap. VIII).

286. Dans la théorie des équations différentielles, on peut ainsi se borner à la considération des systèmes composés exclusivement d'équations du premier ordre, mêlées quelquefois à des équations finies; nous nous placerons de préférence à ce point de vue qui facilite beaucoup la conception et l'énonciation des faits généraux.

Parmi les systèmes du premier ordre, il faut distinguer d'une manière toute spéciale ceux que nous nommerons *immédiats* et dont le caractère fondamental est de *fournir immédiatement telles ou telles dérivées (premières) des fonctions inconnues, exprimées en fonctions composées des variables, de ces mêmes fonctions inconnues et de leurs autres dérivées (premières)*. Eux seuls effectivement se prêtent à l'édification d'une théorie simple, et il faut absolument les connaître pour pouvoir étudier les autres.

287. Le présent Chapitre est consacré à une première étude de la classe la plus simple et aussi la plus importante des systèmes immédiats. Cette classe comprend les systèmes dont *les diverses équations expriment* TOUTES *les dérivées (premières) des fonctions inconnues en fonctions composées, finies par conséquent, des variables indépendantes et de ces mêmes fonctions inconnues;* pour cette raison on les appelle des systèmes d'équations différentielles *totales*.

Leur type est ainsi

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{ll} \dfrac{du}{dx} = \mathrm{U}_x(x, y, \ldots, u, v, \ldots), & \dfrac{dv}{dx} = \mathrm{V}_x(x, y, \ldots, u, v, \ldots), \quad \cdots \\ \dfrac{du}{dy} = \mathrm{U}_y(x, y, \ldots, u, v, \ldots), & \dfrac{dv}{dy} = \mathrm{V}_y(x, y, \ldots, u, v, \ldots), \quad \cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right.$$

où $x, y, \ldots$ représentent les variables indépendantes, $u, v, \cdots$ les fonctions inconnues, $\mathrm{U}_x, \mathrm{V}_x, \ldots, \mathrm{U}_y, \mathrm{V}_y, \ldots$ des fonctions composantes données, et où, pour plus de clarté, nous avons tou-

jours placé dans une même colonne les équations ayant pour premiers membres les dérivées d'une même fonction inconnue par rapport aux diverses variables, dans une même ligne celles dont les premiers membres sont les dérivées des diverses fonctions inconnues par rapport à une même variable.

Les lignes, les colonnes et les équations du Tableau (2) sont ainsi en nombres respectivement égaux à ceux des variables, des fonctions inconnues et à leur produit.

Par exemple, les équations exprimant que les dérivées de l'intégrale indéfinie d'une différentielle totale première donnée sont égales aux multiplicateurs de dx, dy, ... (**208**) constituent un système immédiat d'équations différentielles totales, mais avec cette particularité, que la fonction inconnue n'entre dans aucun second membre.

288. Avant tout, une distinction essentielle doit être faite entre les divers groupes possibles de fonctions intégrales du système immédiat (2).

Dans les uns, les valeurs des variables indépendantes pour lesquelles les intégrales demeurent olotropes, prises avec les valeurs correspondantes

$$u = \upsilon(x, y, \ldots), \qquad v = \varphi(x, y, \ldots), \qquad \ldots,$$

de ces fonctions sont *toujours* des valeurs *ordinaires* (**144**) pour $x, y, \ldots, u, v, \ldots$ considérées un instant comme variables indépendantes dans tous les seconds membres

$$\begin{array}{lll} U_x(x, y, \ldots, u, v, \ldots), & V_x(x, y, \ldots, u, v, \ldots), & \ldots \\ U_y(x, y, \ldots, u, v, \ldots), & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots \end{array}$$

des équations différentielles (2). En d'autres termes, si pour x', y', ..., valeurs particulières des variables prises au hasard, les intégrales $\upsilon(x, y, \ldots)$, $\varphi(x, y, \ldots)$ sont olotropes et prennent les valeurs particulières $u' = \upsilon(x', y', \ldots)$, $v' = \varphi(x', y', \ldots)$, ..., les composantes $U_x(x, y, \ldots, u, v, \ldots)$, V_x, ..., U_y, ... seront toutes olotropes en $x = x'$, $y = y'$, ..., $u = u'$, $v = v'$, ...

Dans d'autres groupes d'intégrales au contraire, ces valeurs correspondantes des variables et des intégrales sont quelquefois

toujours singulières pour l'un au moins des seconds membres de nos équations différentielles, $U_x(x, y, \ldots, u, v, \ldots)$ par exemple, et selon les circonstances tels ou tels autres seconds membres, avec celui-ci, cesseront toujours d'être olotropes pour

$$x = x', \quad y = y', \quad \ldots, \quad u = u', \quad v = v', \quad \ldots.$$

Ces dernières intégrales dites *singulières* n'existent pas toujours. Quand il y en a, c'est par hasard et leur recherche, leur étude ne peuvent se faire qu'à l'aide de procédés impliquant essentiellement la considération des propriétés spéciales des seconds membres des équations différentielles (2). Il en est d'ailleurs ainsi, comme nous l'avons dit généralement (**149**), dans toutes les questions où se rencontrent des fonctions entrant dans des phases singulières. Nous sommes obligé d'attendre le Chapitre XIII (*inf.*) pour en parler avec plus de détails.

Nous appellerons *ordinaires* les intégrales de la première sorte; elles existent dans des cas infiniment plus étendus, et ce sont les seules qui soient susceptibles d'une théorie générale. Nous allons maintenant parler d'elles exclusivement.

289. Examinons tout d'abord les conséquences résultant de l'existence de quelque groupe d'intégrales ordinaires que nous continuerons à représenter par les lettres $u, v, \ldots$, comme si elles étaient encore inconnues.

D'après la définition même de pareilles intégrales, leur substitution dans les équations différentielles données (2) transforme tous leurs seconds membres $U_x(x, y, \ldots, u, v, \ldots), \ldots$ en des fonctions composées de $u, v, \ldots$ considérées comme fonctions simples, dont les composantes sont essentiellement olotropes (aussi longtemps du moins que l'existence de ces intégrales est assurée). L'observation générale faite au n° **282** est alors applicable, et *ces intégrales satisfont ainsi, non seulement aux équations différentielles* (2), *mais encore à toutes celles que l'on trouve en les différentiant de toutes les manières possibles.*

On a ainsi entre les intégrales $u, v, \ldots$ un ensemble illimité de relations différentielles [comprenant les équations données (2)], que nous dirons *primitives* pour les distinguer d'autres dont nous

parlerons dans un instant, et sur lesquelles nous ferons les remarques suivantes.

I. *Chacune d'elles a pour premier membre quelque dérivée d'une intégrale et pour second membre une fonction composée différentielle de l'ensemble des intégrales considérées, dont le plus grand des ordres par rapport à ces diverses fonctions est inférieur d'une unité au moins à celui du premier.*

Car ces particularités s'observent pour une équation quelconque du système (2)

$$\frac{dw}{dt} = W_t(x, y, \ldots, t, \ldots, u, v, \ldots, w, \ldots)$$

dont le premier membre est une dérivée première et le second une fonction composée d'ordres tous nuls, et sur laquelle k différentiations quelconques changent le premier membre en une dérivée d'ordre $k+1$ de w et le second en une expression dont l'ordre par rapport à u, par exemple, ne peut surpasser k, soit que u entre effectivement dans W_t, soit qu'accidentellement cette intégrale n'y figure pas (261).

II. *On trouve autant de relations primitives ayant pour premiers membres une même dérivée de nature donnée d'une intégrale donnée, qu'il y a de variables différentes intéressées dans les différentiations génératrices de cette dérivée.*

Il est évident en effet qu'en supposant p, q, $r \neq 0$, on obtiendra quelque relation primitive ayant pour premier membre $\frac{d^{p+q+r}w}{dx^p\,dy^q\,dz^r}$, dérivée dont la formation comporte des différentiations par rapport aux trois variables distinctes x, y, z, et qu'on ne pourra le faire que de l'une de ces trois manières :

1° Soit en exécutant la différentiation $D_{x,y,z,\ldots}^{[(p-1),q,r,0,\ldots]}$ sur celle des équations du système (2) qui se note par

$$\frac{dw}{dx} = W_x(x, y, z, \ldots, u, v, \ldots, w, \ldots);$$

2° Soit en exécutant la différentiation $D_{x,y,z,\ldots}^{[p,(q-1),r,0,\ldots]}$ sur l'équation

$$\frac{dw}{dy} = W_y;$$

3° Soit enfin en exécutant la différentiation $D_{x,y,z,\dots}^{[p,q,(r-1),0,\dots]}$ sur l'équation

$$\frac{dw}{dz} = W_z.$$

III. *Les seconds membres des relations primitives sont, par rapport aux dérivées de u, v, ... qui y figurent, des polynômes entiers ayant pour coefficients telles ou telles dérivées partielles des composantes* U_x, ... *par rapport à* $x, y, \dots, u, v, \dots$ (254).

IV. *Les relations primitives fournissent immédiatement ainsi, pour toute dérivée d'ordre* $k \geqq 1$ *d'une intégrale, une expression au moins, en fonction composée des variables* x, y, ... *des intégrales* $u, v, \dots$ *et de leurs dérivées d'ordre* $< k$; *de plus, chaque expression de cette espèce est essentiellement entière par rapport aux dérivées des intégrales ainsi qu'aux dérivées partielles des composantes* U_x, ...

Nous donnerons aussi à ces expressions le nom de *primitives*.

V. A l'égard du nombre des expressions primitives d'une dérivée donnée d'une intégrale, il y a à distinguer surtout le cas où cette dérivée est *simple*, c'est-à-dire de la forme $\frac{d^k w}{dt^k}$ ne comportant de différentiations que par rapport à *une seule et même variable* t, de celui où elle est *complexe*, comme $\frac{d^{p+q+r} w}{dx^p\,dy^q\,dz^r}$, dans laquelle les différentiations intéressent simultanément *plusieurs* variables distinctes x, y, z.

Une dérivée simple a une seule expression primitive; une dérivée complexe en a nécessairement plusieurs.

VI. On notera que *le second ordre est le moindre de ceux qui contiennent des dérivées complexes*, et aussi que *chacune d'elles n'y possède que deux expressions primitives*.

VII. Remarquons enfin que si l'on fractionne les différentiations pour arriver à une même relation (ou expression) primitive, *l'ordre dans lequel elles peuvent se succéder n'a aucune influence sur la nature du résultat* (264).

290. La combinaison variée des relations primitives les unes

avec les autres conduit ensuite à une infinité d'autres relations différentielles entre les intégrales ordinaires du système (2) dont nous admettons l'existence. Nous distinguerons seulement celles que l'on trouve en procédant comme il suit.

Nous ferons un premier groupe des équations différentielles (2) elles-mêmes, conservées sans modifications.

Nous leur ajouterons les relations primitives ayant pour premiers membres les dérivées secondes de u, v, ..., après y avoir substitué aux dérivées premières figurant dans leurs seconds membres, leurs expressions fournies par les relations du premier groupe.

A ces deux premiers groupes nous en adjoindrons un troisième formé par les relations primitives contenant les dérivées troisièmes de u, v, ... dans leurs premiers membres, où nous substituerons encore aux dérivées premières et secondes de ces fonctions entrant dans leurs seconds membres, toutes leurs expressions fournies par les nouvelles relations déjà obtenues dans les deux premiers groupes; et ainsi de suite. Plus généralement, *le $k^{\text{ième}}$ groupe se formera, quel que soit k, en prenant les relations primitives ayant les dérivées $k^{\text{ièmes}}$ de u, v, ... dans leurs premiers membres, et y substituant aux dérivées d'ordres* 1, 2, ..., $k-1$ *de u, v, ..., qui seules figurent dans leurs seconds membres* (**289**, I), *toutes les expressions qu'on en peut tirer des nouvelles relations antérieurement construites dans les $k-1$ premiers groupes.*

Nous appellerons *ultimes* les relations de cette espèce, ainsi que les nouvelles expressions qu'elles fournissent immédiatement pour les dérivées de tous ordres de nos intégrales. Voici leurs caractères essentiels.

I. *Les seconds membres des relations ultimes sont tous d'ordres nuls, c'est-à-dire se réduisent à de simples fonctions composées finies de x, y, ..., u, v, ...* La chose a lieu d'elle-même pour le premier groupe, puisqu'il est composé des équations différentielles données elles-mêmes; elle subsiste ensuite pour le $k^{\text{ième}}$ groupe, parce qu'elle a lieu pour les $k-1$ premiers.

II. *Ces mêmes seconds membres se présentent sous forme de*

fonctions composées entières des seconds membres U_x, ... *des équations différentielles* (2) *et de leurs dérivées partielles par rapport* à x, y, ..., u, v, ... C'est une conséquence de la nature spéciale des relations primitives (**289**, III) combinée avec ce fait évident qu'elle s'étend au $k^{\text{ième}}$ groupe des relations ultimes dès qu'on l'a vérifiée pour les $k-1$ premiers.

III. *Selon qu'elle est simple ou complexe* (**289**, V), *chaque dérivée de* u, v, ... *a une seule expression ultime ou plusieurs.*

Quand la dérivée considérée d'ordre k est simple, toutes les dérivées contenues dans son expression primitive le sont nécessairement aussi. Il s'ensuit que son expression ultime est unique, si celles des dérivées simples d'ordres 1, 2, ..., $k-1$ jouissent de cette propriété. Elle l'est donc quel que soit k, puisque les équations différentielles (2), constituant le premier groupe des relations ultimes, assignent une seule expression ultime à chacune des dérivées premières de u, v, ...

Quand elle est complexe, d'une part elle a plusieurs expressions primitives (**289**, V), d'autre part chacune de ces expressions peut contenir des dérivées complexes (d'ordres moindres) dont chacune pour cette même raison peut être éliminée de plusieurs manières. Il en résulte évidemment, pour ces expressions ultimes, une multiplicité certaine dont l'étendue égale quelquefois, surpasse habituellement celle de ses expressions primitives.

IV. Comme d'une part les dérivées premières, toutes simples, ne possèdent chacune qu'une seule expression ultime, comme d'autre part toute dérivée complexe seconde ne possède que deux expressions primitives (**289**, VI), *chacune de ces dernières n'est susceptible que de deux expressions ultimes.*

V. Réciproquement, *les relations ultimes entraînent les relations primitives comme celles-ci les avaient entraînées.* En remettant effectivement dans les relations ultimes à la place de chaque expression qui pour les construire avait été substituée à une dérivée de u, v, ... la notation de cette dérivée (expression qui est égale à cette dérivée en vertu de quelque relation ultime d'un groupe antérieur), on régénère évidemment toutes les relations primitives.

Plus brièvement, *le passage des relations primitives aux relations ultimes est une opération absolument réversible.*

291. Deux exemples empruntés aux cas les plus simples éclairciront suffisamment les considérations précédentes.

I. Pour l'équation différentielle unique à une seule fonction inconnue u d'une seule variable indépendante x,

$$\frac{du}{dx} = \mathrm{U}(x, u), \tag{3}$$

et en admettant l'existence d'une intégrale ordinaire u, les relations primitives seront cette équation elle-même et celles-ci obtenues en les différentiant indéfiniment

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 u}{dx^2} &= \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial u}\frac{du}{dx},\\
\frac{d^3 u}{dx^3} &= \frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial x\,\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial u^2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x}\frac{d^2 u}{dx^2},\\
\frac{d^4 u}{dx^4} &= \frac{\partial^3 \mathrm{U}}{\partial x^3} + 3\frac{\partial^3 \mathrm{U}}{\partial x^2\,\partial u}\frac{du}{dx} + \ldots,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Les relations ultimes seront

$$\begin{aligned}
\frac{du}{dx} &= \mathrm{U}(x, u),\\
\frac{d^2 u}{dx^2} &= \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial u}\mathrm{U}(x, u),\\
\frac{d^3 u}{dx^3} &= \frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial x\,\partial u}\mathrm{U} + \frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial u^2}\mathrm{U}^2 + \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial u}\left[\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial u}\mathrm{U}\right],\\
\frac{d^4 u}{dx^4} &= \frac{\partial^3 \mathrm{U}}{\partial x^3} + 3\frac{\partial^3 \mathrm{U}}{\partial x^2\,\partial u}\mathrm{U} + \ldots,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Ici, *comme dans tous les cas où il n'y a qu'une seule variable indépendante, toutes les dérivées des intégrales sont essentiellement simples, et chacune d'elles n'est susceptible que d'une expression, soit primitive, soit ultime.*

II. Pour le système immédiat à une seule fonction inconnue u

de deux variables indépendantes x, y,

$$(4) \quad \begin{cases} \dfrac{du}{dx} = U_x(x, y, u), \\ \dfrac{du}{dy} = U_y(x, y, u), \end{cases}$$

on trouvera, en se bornant aux expressions des dérivées secondes :

1° Pour relations primitives

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = \frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_x}{\partial u}\frac{du}{dx},$$

puis

$$\frac{d^2 u}{dx\,dy} = \frac{\partial U_x}{\partial y} + \frac{\partial U_x}{\partial u}\frac{du}{dy}$$

ou bien

$$\frac{d^2 u}{dx\,dy} = \frac{\partial U_y}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial u}\frac{du}{dx},$$

selon qu'on opérera en différentiant la première ou la seconde des équations (4), et finalement

$$\frac{d^2 u}{dy^2} = \frac{\partial U_y}{\partial y} + \frac{\partial U_y}{\partial u}\frac{du}{dy};$$

2° A l'aide des équations (4), premier groupe des relations soit primitives, soit ultimes, on en déduit le second groupe de relations ultimes

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = \frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_x}{\partial u}U_x(x, y, u),$$

$$\frac{d^2 u}{dx\,dy} = \frac{\partial U_x}{\partial y} + \frac{\partial U_x}{\partial u}U_y$$

et

$$\frac{d^2 u}{dx\,dy} = \frac{\partial U_y}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial u}U_x,$$

$$\frac{d^2 u}{dy^2} = \frac{\partial U_y}{\partial y} + \frac{\partial U_y}{\partial u}U_y.$$

292. *Quand le système* (2) *possède quelque groupe d'intégrales toutes olotropes en* x_0, y_0, ..., *les développements de ces fonctions par la formule de Taylor à partir de ces valeurs des variables peuvent être reconstruits dès que l'on connaît seulement leurs valeurs initiales* u_0, v_0, ...

Comme les seconds membres des relations ultimes formées au n° **290** contiennent $x, y, \ldots, u, v, \ldots$ seulement, et qu'on sait avoir

$$u = u_0, \qquad v = v_0, \qquad \ldots$$

pour

$$x = x_0, \qquad y = y_0, \qquad \ldots,$$

cette dernière hypothèse numérique les transforme tous en des quantités connues. On obtient ainsi les valeurs correspondantes des premiers membres de toutes ces relations, c'est-à-dire les valeurs initiales de toutes les dérivées des intégrales ordinaires dont l'existence est admise. Or ces valeurs initiales, avec celles des intégrales elles-mêmes que l'on connaissait auparavant, sont précisément les coefficients des développements cherchés, aux diviseurs numériques connus près.

Par exemple, si l'on sait que l'équation (3) possède une intégrale ordinaire olotrope en x_0 et y prenant la valeur u_0, le développement de cette intégrale en série entière par rapport à $x - x_0$ sera, d'après ce qui a été dit au n° **291**, I,

$$u_0 + \mathrm{U}(x_0, u_0)\frac{x - x_0}{1}$$
$$+ [\mathrm{U}^{(1,0)}(x_0, u_0) + \mathrm{U}^{(0,1)}(x_0, u_0)\,\mathrm{U}(x_0, u_0)]\frac{(x - x_0)^2}{1.2} + \ldots.$$

293. Les formules primitives (**289**) pourraient aussi bien être employées à la reconstruction de ces développements. Il suffirait d'y poser toujours $x = x_0, y = y_0, \ldots$, de les écrire par ordres croissants, et de les résoudre successivement par rapport aux valeurs initiales des dérivées des intégrales que cette hypothèse numérique y aurait introduites. De cette manière l'élimination progressive des dérivées d'ordres moindres *suivrait,* au lieu de la précéder, la réalisation de l'hypothèse numérique initiale; mais il est évident qu'on retrouverait ainsi les mêmes valeurs pour les coefficients de ces développements (**290**, V).

294. Nous n'avons fait aucune allusion à la multiplicité des expressions primitives ou ultimes des dérivées complexes signalée ci-dessus. Il n'y a pas effectivement à s'en préoccuper; on pourra bien à cause d'elle obtenir de plusieurs manières les valeurs de cer-

tains coefficients des développements, mais, pour chaque coefficient, ces valeurs seront de toute nécessité numériquement égales les unes aux autres, parce que les diverses expressions d'une même dérivée complexe sont données par des formules qui toutes sont des conséquences *nécessaires* de l'existence supposée des intégrales, et qui, par suite, ne peuvent manquer de s'accorder entre elles.

Existence des intégrales ordinaires dans le cas de passivité.

295. Les calculs indéfinis qui viennent de nous procurer la reconstitution des développements d'un groupe d'intégrales ordinaires du système immédiat d'équations différentielles totales

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{du}{dx} = \mathrm{U}_x(x, y, \ldots, u, v, \ldots), & \dfrac{dv}{dx} = \mathrm{V}_x(x, y, \ldots, u, v, \ldots), \quad \ldots \\ \dfrac{du}{dy} = \mathrm{U}_y(x, y, \ldots, u, v, \ldots), & \dfrac{dv}{dy} = \mathrm{V}_y(x, y, \ldots, u, v, \ldots), \quad \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \end{cases}$$

que l'on saurait exister et dont on connaîtrait seulement les valeurs initiales

$$(2)\qquad u_0,\ v_0,\ \ldots,$$

correspondant aux valeurs initiales attribuées aux variables indépendantes

$$(3)\qquad x_0,\ y_0,\ \ldots,$$

permettent évidemment aussi de trouver *par la méthode des coefficients indéterminés,* même quand on ne connaît rien sur eux, tous les groupes de ces intégrales qui peuvent exister. Pour cela, il suffit effectivement : d'abord de prendre arbitrairement dans les aires

$$(4)\qquad \mathrm{S}_x,\ \mathrm{S}_y,\ \ldots,\ \mathrm{S}_u,\ \mathrm{S}_v,\ \ldots,$$

où les composantes U_x, V_x, ..., U_y, ... restent toutes olotropes, les quantités (3) (2) servant de matériaux à ces calculs, ensuite de construire les mêmes séries entières en $(x - x_0)$, $(y - y_0)$, ...

que si l'on avait la certitude d'aboutir à des intégrales [rien ne peut entraver cette opération, puisque nous restons dans les limites d'olotropie des composantes U_x, ... et qu'il y a simplement à former des expressions entières des valeurs de leurs dérivées partielles correspondant aux valeurs particulières (3), (2) de x, y, ..., u, v, ...], puis enfin de sommer ces séries quand elles admettent quelque système de rayons de convergence tous différents de zéro et quand leurs sommes satisfont effectivement aux équations différentielles du système.

En procédant de la sorte pour toutes les combinaisons de valeurs des quantités (3), (2) qui tombent dans les aires (4), on ne pourra manquer de découvrir les développements de toutes les intégrales ordinaires du système proposé; et il ne restera plus, pour chaque groupe, qu'à prolonger aussi loin que possible, par voie de cheminement, les premiers développements ainsi obtenus. Au sujet de cette dernière partie de l'opération, nous n'avons rien à ajouter présentement aux généralités sur lesquelles nous nous sommes étendu dans le dernier paragraphe du Chap. VI; mais nous allons établir les principales propositions auxquelles conduit l'étude approfondie des autres, en commençant par l'examen d'un point capital.

296. Nous avons constaté aux nos 289, 290 que les formules, soit primitives, soit ultimes, donnent *plusieurs* expressions pour chaque dérivée complexe, et au n° 294, que cette multiplicité n'a pas d'inconvénients quand il s'agit simplement de reconstituer les développements d'intégrales ordinaires dont l'existence est certaine. Mais, quand on opère comme au n° 295, sur des valeurs des quantités (3), (2) prises au hasard dans les aires (4), on conçoit qu'il puisse en être autrement, que les valeurs diverses obtenues pour un même coefficient du développement d'une intégrale hypothétique soient inégales. L'existence d'intégrales satisfaisant aux conditions résultant des données (3), (2) devient alors impossible; car, quelque choix que l'on fasse entre ces diverses valeurs, le développement obtenu ne peut, même en cas de convergence, satisfaire à celles des équations (1) dont la différentiation a concouru à la formation des formules primitives qui, directement ou indirectement, attribuent d'autres valeurs au coefficient considéré.

Pour le coefficient de $(x - x_0)(y - y_0)$ dans le développement de l'intégrale hypothétique du système (4) considéré au n° **291**, II, les formules ultimes donnent, par exemple, les deux valeurs

$$\left[\frac{\partial U_x}{\partial y} + \frac{\partial U_x}{\partial u} U_y\right]_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0 \\ u=u_0}}, \qquad \left[\frac{\partial U_y}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial u} U_x\right]_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0 \\ u=u_0}}.$$

Si elles sont inégales et que l'on adopte la première, le développement ne peut satisfaire à la dernière équation du système, dont la considération assigne précisément au coefficient considéré la valeur rejetée.

297. Une égalité numérique constante entre toutes les valeurs initiales fournies par les formules ultimes pour une même dérivée quelconque d'une intégrale hypothétique est donc une condition absolument nécessaire à l'existence d'un groupe d'intégrales ordinaires répondant aux données initiales choisies. Elle peut résulter de deux causes entièrement différentes :

Soit *d'un choix convenable des valeurs numériques des quantités* (3), (2), *relativement à la nature particulière des composantes* U_x, ... *figurant dans les seconds membres des équations* (1), choix qui, *s'il est possible,* ferait naître l'égalité en question pour ces données initiales, sans l'assurer pour d'autres;

Soit *d'une corrélation mutuelle spéciale entre les composantes* U_x, ..., *de nature à établir l'égalité dont il s'agit, indépendamment de toute précaution dans le choix des valeurs numériques des données initiales en question.*

Dans ce dernier cas, qui est de beaucoup le plus intéressant, les intégrales ordinaires existent toujours comme nous allons incessamment le constater, et elles jouissent de propriétés générales très remarquables dont l'étude constitue la partie la plus importante de la théorie des équations différentielles (Chap. XIII, *inf.*).

Nous caractériserons la corrélation ci-dessus spécifiée entre les fonctions U_x, ..., en disant que le système (1) dont elles forment les seconds membres est *passif.*

Pour un système non passif, l'existence des intégrales ordinaires est essentiellement subordonnée à la possibilité pour la première cause signalée d'entrer en jeu, partant précaire. Nous

donnerons aux intégrales de cette sorte, quand par hasard il y en aura, le nom d'*exceptionnelles,* et nous ajournerons aux n^os^ **380**, **405** (*inf.*) le peu que nous avons à en dire.

Le système (1) est évidemment passif ou non, suivant que les diverses expressions ultimes de toute dérivée d'une intégrale hypothétique, sont ou non égales entre elles, quelles que soient x, y, ..., u, v, ... considérées comme autant de variables indépendantes; car les valeurs initiales à assigner à cette dérivée sont précisément ce que deviennent ces expressions quand on y écrit x_0, y_0, ..., u_0, v_0, ..., à la place de x, y, ..., u, v, ...

Et il reste à se préoccuper de cette égalité pour les dérivées complexes seulement, puisque chaque dérivée simple n'est susceptible que d'une seule expression ultime.

Cela posé, la distinction s'opère aisément à l'aide du théorème suivant.

298. *Pour que le système* (1) *soit passif, il est nécessaire et suffisant que l'égalité identique ci-dessus spécifiée ait lieu dans l'ordre le moins élevé des dérivées complexes, c'est-à-dire entre les deux expressions ultimes de chacune des dérivées complexes secondes des diverses intégrales hypothétiques* (**290**, IV).

La nécessité de cette condition résulte immédiatement de l'égalité de cette sorte qui doit avoir lieu pour les dérivées complexes du second ordre en particulier. Nous prouverons qu'elle est suffisante en raisonnant comme il suit.

I. La méthode expliquée au n° **290** pour déduire des relations primitives entre les intégrales ordinaires u, v, ... du système (1), dont nous admettions alors l'existence, une expression au moins de l'une de leurs dérivées d'ordre quelconque $k+1$, $w^{(k+1)}$, en fonction composée finie de x, y, ... et de ces intégrales elles-mêmes, n'est pas la seule qui conduise à un semblable résultat. On peut y arriver par le procédé beaucoup plus général consistant : 1° à décomposer d'abord en deux groupes, l'un de $p \begin{pmatrix} >0 \\ <k \end{pmatrix}$ différentiations, l'autre de $q = k - p \begin{pmatrix} <k \\ >0 \end{pmatrix}$, la différentiation d'ordre total k à exécuter sur une équation du système (1) pour

obtenir une expression primitive de $w^{(k+1)}$; 2° à exécuter ensuite sur l'équation en question les p premières différentiations; 3° à substituer aux dérivées d'ordres 1, 2, ..., p qu'elles ont introduites dans le second membre, leurs expressions finies que les calculs antérieurs semblables peuvent être supposés avoir fournies pour toutes celles d'ordre $< k+1$; 4° à exécuter ensuite les q autres différentiations; 5° à substituer enfin leurs expressions de provenance semblable aux dérivées d'ordres 1, 2, ..., q de u, v, ... que ces dernières différentiations ont fait reparaître. Et la même observation s'applique aux dérivées des intégrales hypothétiques dont nous nous occupons en ce moment.

Dans l'hypothèse $p = k$, $q = 0$ (ou bien $p = 0$, $q = k$), ce nouveau procédé se confond avec celui qui nous a fourni les expressions ultimes; *dans toutes les autres il ne donne jamais que des expressions ultimes et il peut toutes les reproduire,* ce que nous allons constater dans la mesure où nous avons besoin de le savoir.

II. *Si, pour chaque dérivée de u, v, ... dont l'ordre ne surpasse pas k, toutes les expressions finies dont la génération vient d'être décrite (y compris les ultimes) sont égales identiquement, c'est-à-dire quelles que soient x, y, ..., u, v, ... considérées comme autant de variables indépendantes, la même égalité identique a lieu entre celles des mêmes expressions finies de chaque dérivée d'ordre $k+1$, qui ont été déduites d'une même équation du système (1) par un ensemble donné de k différentiations à décomposer arbitrairement comme ci-dessus en deux groupes, l'un de p, l'autre de q différentiations.*

L'égalité en question est évidente entre celles de ces expressions qui sont ultimes; car elles s'obtiennent ici en substituant dans une même expression primitive de $w^{(k+1)}$ des expressions finies des dérivées de u, v, ... d'ordres 1, 2, ..., k, à chacune desquelles notre hypothèse attribue une individualité constante. Il suffit donc de l'établir entre cette expression ultime, d'une part, et toute autre expression finie de $w^{(k+1)}$.

Pour fixer les idées et nous soustraire aussi à la confusion de notations trop compliquées, nous raisonnerons sur le système le

plus simple se réduisant, comme au n° **291**, I, à l'unique équation

$$\frac{du}{dx} = \mathrm{U}(x, u), \tag{5}$$

pour laquelle plusieurs conditions de l'énoncé se trouvent réalisées d'elles-mêmes.

Les p premières différentiations conduisent d'abord à une formule primitive qu'on peut considérer comme résultant des substitutions

$$u_{0,0} = u, \quad u_{1,0} = \frac{du}{dx}, \quad u_{2,0} = \frac{d^2 u}{dx^2}, \quad \ldots, \quad u_{p,0} = \frac{d^p u}{dx^p}$$

faites dans une relation de la forme

$$\frac{d^{p+1} u}{dx^{p+1}} = \mathrm{U}_{p,0}(x, u_{0,0}, u_{1,0}, \ldots, u_{p,0}), \tag{6}$$

où $\mathrm{U}_{p,0}$ est une composante déterminée, dépendant tant de la nature de U que de la grandeur du nombre p.

Les q dernières différentiations conduisent ensuite à une formule fournissant l'expression primitive de $u^{(k+1)}$ et qu'on peut encore considérer comme résultant des substitutions

$$u_{i,j} = \frac{d^{i+j} u}{dx^{i+j}}$$

dans une autre relation de la forme

$$\frac{d^{k+1} u}{dx^{k+1}} = \mathrm{U}_{p,q}(x, u_{0,0}, u_{0,1}, \ldots, u_{0,q}, u_{1,0}, u_{1,1}, \ldots. u_{1,q}, \ldots, u_{p,0}, u_{p,1}, \ldots, u_{p,q}),$$

où $\mathrm{U}_{p,q}$ est une nouvelle composante dépendant de la nature de $\mathrm{U}_{p,0}$ et de la grandeur de q. Et, pour en obtenir l'expression ultime, il faut y mettre à la place de $u_{0,0}$ la lettre u, puis à celles de $u_{i,j}$ les fonctions $\Upsilon_{i+j}(x, u)$, expressions finies de $\frac{d^{i+j} u}{dx^{i+j}}$, qui pour chaque dérivée ont une individualité indépendante de leur provenance, à cause de l'hypothèse et de $i + j < k + 1$.

Cela posé, la formation de toute autre expression finie de $u^{(k+1)}$ au moyen du procédé décrit dans l'alinéa I conduira : à substituer à $u_{0,0}, u_{1,0}, \ldots, u_{p,0}$, dans la formule (6), u et les expres-

sions ultimes $\Upsilon_1(x, u), \ldots, \Upsilon_p(x, u)$, ce qui donne

$$\frac{d^{p+1} u}{dx^{p+1}} = U_{p,0}(x, u, \Upsilon_1, \ldots, \Upsilon_p);$$

à différentier q fois cette relation, ce qui donne

$$\frac{d^{k+1} u}{dx^{k+1}} = U_{p,q}\left(x, u, \frac{du}{dx}, \ldots, \frac{d^q u}{dx^q}, \Upsilon_1, \ldots, \frac{d^q \Upsilon_1}{dx^q}, \ldots, \Upsilon_p, \ldots, \frac{d^q \Upsilon_p}{dx_q}\right),$$

$\frac{d^j \Upsilon_i}{dx^i}$ représentant la dérivée $j^{\text{ième}}$ de la fonction composée $\Upsilon_i(x, u)$, calculée comme si u y désignait une fonction simple indéterminée de x ; à substituer enfin leurs expressions finies (toujours d'individualités déterminées), à $\frac{du}{dx}, \frac{d^2 u}{dx^2}, \ldots, \frac{d^q u}{dx^q}$ entrant dans le second membre de cette équation tant ostensiblement que médiatement comme engagées dans les fonctions composées différentielles $\frac{d^j \Upsilon_i}{dx^j}$.

Or, q étant $< k$, ces substitutions finales changent par hypothèse $\frac{d^j \Upsilon_i}{dx^i}$ en Υ_{i+j} ; elles feront donc retomber pour cette nouvelle expression finie de $u^{(k+1)}$, sur son expression ultime précédemment obtenue,

$$\frac{d^{k+1} u}{dx^{k+1}} = U_{p,q}(x, u, \Upsilon_1, \ldots, \Upsilon_q, \Upsilon_1, \Upsilon_2, \ldots, \Upsilon_{1+q}, \ldots, \Upsilon_p, \Upsilon_{p+1}, \ldots, \Upsilon_{p+q}).$$

Pour un système quelconque, la démonstration complète exigerait des signes multipliés dont le maniement et la reproduction typographique seraient matériellement difficiles; mais on aperçoit aisément que les choses s'y passent de la même manière, parce que les conditions posées dans l'énoncé, combinées avec l'observation du n° 289, VII, suppléent aux circonstances réalisées d'elles-mêmes pour l'équation (5), et imposent une individualité constante à chacun des divers objets analogues à ceux que nous avons désignés par les notations $U_{p,0}$, $U_{p,q}$, Υ_{i+j}, $\frac{d^j \Upsilon_i}{dx^j}$.

III. *Sous les mêmes conditions et si* $k+1 > 2$, *les mêmes conclusions subsistent pour deux expressions finies de* $w^{(k+1)}$ *déduites d'une manière quelconque de deux équations différentes du système* (1).

Supposons, par exemple, que l'ensemble des différentiations caractéristiques de $w^{(k+1)}$ en comprenne une D_x par rapport à x, une autre D_y par rapport à y et un groupe D de $k - 1$ autres quelconques, en sorte que l'on ait $w^{(k+1)} = D_x D_y D w$. Supposons en outre que, pour obtenir les deux expressions finies de $w^{(k+1)}$ qui sont en cause, il ait fallu exécuter la différentiation $D_y D$ sur l'équation

$$\frac{dw}{dx} = W_x, \tag{7}$$

et la différentiation $D_x D$ sur l'équation

$$\frac{dw}{dy} = W_y. \tag{7 bis}$$

D'après l'alinéa précédent, il suffit de prouver l'identité des expressions ultimes de $w^{(k+1)}$, tirées l'une de l'équation (7), l'autre de l'équation (7 *bis*); de plus, il est permis de calculer la première en exécutant la différentiation D sur $\Psi_{x,y}$, expression ultime de $\frac{d^2 w}{dx\,dy}$ tirée de (7), puis en rééliminant les dérivées d'ordres 1, 2, ..., $k - 1$ de $u, v, \ldots$, de calculer la seconde par la même différentiation D opérée sur $\Psi_{y,x}$, expression ultime de $\frac{d^2 w}{dx\,dy}$ tirée de (7 *bis*), et suivie des mêmes rééliminations.

Or, par hypothèse, il y a identité entre $\Psi_{x,y}$, $\Psi_{y,x}$, expressions finies d'une même dérivée d'ordre 2 non $> k$; par hypothèse encore, chacune des dérivées d'ordres 1, 2, ..., $k - 1$ qu'on a rééliminées n'est susceptible que d'expressions finies toutes identiques les unes aux autres. Donc il y a identité aussi entre les expressions ultimes de $w^{(k+1)}$ qui sont en question.

IV. Chaque dérivée de $u, v, \ldots$, soit première, soit seconde mais alors simple, n'a en fait qu'une expression finie; d'autre part, toutes les expressions finies des dérivées complexes secondes se réduisent à leurs expressions ultimes et les deux expressions ultimes de chacune d'elles sont toujours identiques en vertu de l'hypothèse faite dans l'énoncé de notre théorème. Les raisonnements ci-dessus (II), (III) peuvent donc être faits successivement et indéfiniment pour $k = 2, 3, \ldots$, et ils étendent à tous les ordres

l'identité de toutes les expressions finies (ultimes en particulier) d'une même dérivée de u, v, ...; c'est ce que nous avions à prouver.

299. En vertu du théorème précédent, *les conditions de passivité* du système (1) se formeront en égalant identiquement, c'est-à-dire x, y, ..., u, v, ... y étant considérées un instant comme des variables toutes indépendantes les unes des autres indistinctement, les deux expressions ultimes de chacune des dérivées complexes secondes des diverses intégrales hypothétiques. Si le système implique g fonctions inconnues de h variables, le nombre des dérivées complexes secondes de chaque fonction inconnue est $\frac{h(h-1)}{1.2}$, nombre des combinaisons 2 à 2 des h variables; celui des conditions de passivité, égal au nombre total de ces dérivées complexes, a donc pour expression $g\,\frac{h(h-1)}{1.2}$.

Pour le système (4) considéré aux n^{os} **291**, **296**, on a $g=1$, $h=2$, et le nombre des conditions se réduit à 1. Cette condition unique est

$$\begin{aligned} & U_x^{(0,1,0)}(x, y, u) + U_x^{(0,0,1)}(x, y, u)\,U_y(x, y, u) \\ & \quad = U_y^{(1,0,0)}(x, y, u) + U_y^{(0,0,1)}\,U_x(x, y, u) \end{aligned}$$

(quelles que soient x, y, u).

Une particularité essentielle à noter est que *le système* (1) *est passif de lui-même, c'est-à-dire sans aucune condition, quand le nombre des variables se réduit à* 1. Effectivement toutes les dérivées des intégrales hypothétiques sont nécessairement simples et il n'y a point de dérivées complexes de l'inégalité des expressions ultimes desquelles on ait à se préoccuper.

Les conditions d'intégrabilité du calcul inverse des dérivées (Chap. VIII) sont évidemment les conditions de passivité des équations différentielles immédiates par lesquelles on peut formuler chaque problème particulier. Mais, hors ce cas de systèmes immédiats dont les seconds membres ne contiennent ni les fonctions, ni leurs dérivées, *les conditions de passivité ne sont pas des conditions d'intégrabilité rigoureuses;* il existe en effet des systèmes immédiats doués d'intégrales ordinaires bien qu'ils ne soient pas passifs, ce dont on trouvera un exemple au n° **405** (*inf.*).

C'est pour ce motif que, dans le cas général dont nous commençons l'étude, nous n'avons pas laissé à ces conditions le nom impropre de *conditions d'intégrabilité* qu'on leur donne habituellement.

300. La démonstration très importante du numéro suivant, celle aussi du n° 362 (*inf.*), reposent toutes deux sur un même artifice dérivant de notions très simples qu'il convient d'établir auparavant.

Étant donnée une fonction olotrope $f(x, y, \ldots)$ de variables quelconques, nous appellerons *majorante* de cette fonction en x_0, y_0, ... toute fonction $\varphi(x, y, \ldots)$ des mêmes variables, jouissant de la propriété que, pour $x = x_0$, $y = y_0$, ..., sa valeur et celles de ses dérivées de tous ordres soient réelles positives, et supérieures aux modules des valeurs correspondantes de $f(x, y, \ldots)$ et de ses dérivées semblables.

D'après cela, les points suivants sont évidents :

I. *Toute dérivée de φ est une majorante pour la dérivée semblable de f.*

II. *Toute fonction composée différentielle, à composante entière, de fonctions simples olotropes $f_1(x, y, \ldots)$, $f_2(x, y, \ldots)$, ... admet pour majorante ce qu'elle devient quand on y substitue : 1° aux signes — de la composante le signe + partout; 2° à ses coefficients, des quantités positives égales ou supérieures à leurs modules; 3° aux fonctions f_1, f_2, ..., d'autres fonctions simples $\varphi_1(x, y, \ldots)$, $\varphi_2(x, y, \ldots)$, ... jouant à leur égard le rôle de majorantes.*

301. Nous passons au théorème assurant dans le cas le plus général l'existence des intégrales ordinaires du système (1) *que nous supposerons désormais passif.* En outre, *nous supposerons limitées les aires* (4) où l'on sait que les composantes des seconds membres

$$(8)\qquad \left\{\begin{array}{l} U_x(x, y, \ldots, u, v, \ldots),\quad V_x,\quad \ldots \\ U_y(x, y, \ldots, u, v, \ldots),\quad V_y,\quad \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

sont toutes olotropes; et, en appelant toujours g le nombre des

fonctions inconnues, h celui des variables indépendantes, nous poserons, pour abréger,

$$(9) \qquad \gamma = \frac{1}{g};$$

puis nous représenterons par δ une première constante positive, égale ou inférieure au plus petit des olomètres des composantes (8) dans les aires (4), par r une deuxième inférieure à δ, par M une troisième supérieure à la fois à γ et à tous les modules que les valeurs des fonctions (8) peuvent atteindre dans les aires (4) accrues de zones additionnelles d'épaisseurs comprises entre r et δ (181), par $\mathfrak{M}$, enfin, une quatrième au moins égale à $M+\gamma$. Tout cela posé, le théorème en question s'énonce ainsi :

De quelque manière que les données initiales (2), (3) *aient été prises à l'intérieur des aires* (4), *les développements des intégrales hypothétiques du système* (1), *construits sur ces données comme nous l'avons expliqué ci-dessus* (295), (292), *admettent tous des rayons de convergence au moins égaux à*

$$(10) \qquad \frac{r}{2gh\mathfrak{M}},$$

et leurs sommes

$$(11) \qquad \upsilon(x, y, \ldots), \quad \varphi(x, y, \ldots), \quad \ldots$$

sont les premiers développements de fonctions qui sont effectivement des intégrales de ces équations.

I. *En posant, pour abréger,*

$$(x-x_0)+(y-y_0)+\ldots+(u-u_0)+(v-v_0)+\ldots = \mathfrak{S},$$

la fonction

$$\Omega(x, y, \ldots, u, v, \ldots) = -\gamma + \frac{\mathfrak{M}}{1-\frac{\mathfrak{S}}{r}}$$

est majorante en $x_0, y_0, \ldots, u_0, v_0, \ldots$ (300), *pour chacune des composantes* (8).

En effet, il vient immédiatement pour les ordres partiels quel-

conques $p, q, \ldots$

$$\Omega^{(p,q,\ldots)}(x_0, y_0, \ldots, u_0, v_0, \ldots) = \mathfrak{M}\frac{1.2\ldots p}{r^p}\,\frac{(p+1)(p+2)\ldots(p+q)}{r^q}\ldots,$$

quantité positive qui, à cause de $\mathfrak{M} > \mathrm{M}$ et d'après le n° 183, surpasse évidemment $\operatorname{mod} \mathrm{W}^{(p,q,\ldots)}(x_0, y_0, \ldots, u_0, v_0, \ldots)$, W désignant l'une quelconque de ces composantes.

Pour l'ordre total o on a d'ailleurs

$$\Omega(x_0, y_0, \ldots, u_0, v_0, \ldots) = \mathfrak{M} - \gamma \geqq \mathrm{M} > \operatorname{mod} \mathrm{W}(x_0, y_0, \ldots, u_0, v_0, \ldots).$$

II. *La fonction*

$$(12) \qquad 1.3.5\ldots(2k-3)\left(\frac{g}{r}\right)^{k-1}\frac{\mathfrak{M}^k}{\left(1-\frac{\mathfrak{S}}{r}\right)^{2k-1}}$$

est majorante en $x_0, y_0, \ldots, u_0, v_0, \ldots$, pour l'expression ultime (290) *de l'une quelconque des dérivées d'ordre total $k\,(>1)$ des intégrales hypothétiques du système* (1).

1° L'expression ultime de $\frac{d^2u}{dx^2}$,

$$\frac{\partial \mathrm{U}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{U}_x}{\partial u}\mathrm{U}_x + \frac{\partial \mathrm{U}_x}{\partial v}\mathrm{V}_x + \ldots,$$

admet pour majorante (300, II)

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x} + \frac{\partial \Omega}{\partial u}\Omega + \frac{\partial \Omega}{\partial v}\Omega + \ldots = \frac{1}{r}\frac{\mathfrak{M}}{\left(1-\frac{\mathfrak{S}}{r}\right)^2}\left[1 + g\left(-\gamma + \frac{\mathfrak{M}}{1-\frac{\mathfrak{S}}{r}}\right)\right]$$
$$= 1.\frac{g}{r}\frac{\mathfrak{M}^2}{\left(1-\frac{\mathfrak{S}}{r}\right)^3},$$

à cause de $g\gamma = 1$ (9), et l'on retombera sur la même majorante pour les expressions ultimes de $\frac{d^2u}{dx\,dy}, \frac{d^2u}{dy^2}, \ldots, \frac{d^2v}{dx^2}, \frac{d^2v}{dx\,dy}, \ldots$, parce que la fonction Ω jouit de la double propriété d'être majorante pour chacun des seconds membres de nos équations différentielles (I) et d'avoir, égales identiquement entre elles, toutes ses dérivées d'un même ordre total quelconque. Le point dont nous nous occupons est donc exact pour $k = 2$, car le dernier

résultat obtenu est précisément cé à quoi l'expression (12) se réduit alors.

2° Les équations (1) formant par hypothèse un système passif, les expressions ultimes des dérivées d'ordre total $k+1$ de $u, v, \ldots$ peuvent être formées en différentiant une fois seulement celles des dérivées d'ordre k, et substituant ensuite les seconds membres de ces équations aux dérivées premières des mêmes intégrales hypothétiques que ces différentiations ont fait reparaître. C'est ce qui résulte des alinéas (II), (III) du n° 298, en y prenant $p=k-1$, $q=1$.

3° Si maintenant on admet que la fonction (12) jouit, jusqu'à la valeur k de cet indice, de la propriété majorante énoncée, on prouvera immédiatement qu'elle en jouit aussi pour la valeur $k+1$, en appliquant le procédé ci-dessus (2°) à la formation des expressions ultimes des dérivées d'ordre total $k+1$ de $u, v, \ldots$, et en se souvenant que Ω est majorante pour toutes celles des dérivées premières (300). La propriété dont il s'agit est donc générale, puisqu'elle existe pour $k=2$ (1°).

III. *Pour les valeurs $\xi, \eta, \ldots$ attribuées aux modules des différences $(x-x_0)$, $(y-y_0)$, ..., le module de*

$$A_{m,n,\ldots}\frac{(x-x_0)^m}{1.2\ldots m}\frac{(y-y_0)^n}{1.2\ldots n}\ldots,$$

terme en $(x-x_0)^m(y-y_0)^n\ldots$ dans le développement d'une intégrale hypothétique quelconque du système (1), *est inférieur à*

$$(13)\qquad \frac{r}{g}\frac{1.2\ldots(m+n+\ldots)}{1.2\ldots m.1.2\ldots n.1\ldots}\left(\frac{2g\mathfrak{M}}{r}\right)^{m+n+\ldots}\xi^m\eta^n\ldots;$$

car, $A_{m,n,\ldots}$ étant la valeur initiale de l'expression ultime de quelque dérivée d'ordre total $(m+n+\ldots)$ d'une intégrale hypothétique, on obtient une quantité positive supérieure à son module en faisant

$$k=m+n+\ldots,$$

$$x=x_0,\qquad y=y_0,\qquad \ldots,\qquad u=u_0,\qquad v=v_0,\qquad \ldots$$

dans la fonction (12), majorante de cette expression pour les va-

leurs dont il s'agit. D'où les inégalités évidentes

$$\begin{aligned}\text{mod}\, A_{m,n,\ldots} &< \frac{r}{g}\, 1.3.5\ldots[2(m+n+\ldots)-3]\left(\frac{g\mathfrak{M}}{r}\right)^{m+n+\ldots},\\ &< \frac{r}{g}\, 2.4.6\ldots[2(m+n+\ldots)]\left(\frac{g\mathfrak{M}}{r}\right)^{m+n+\ldots},\\ &< \frac{r}{g}\, 1.2.3\ldots(m+n+\ldots)\left(\frac{2g\mathfrak{M}}{r}\right)^{m+n+\ldots}.\end{aligned}$$

IV. Un mot nous suffit maintenant pour démontrer la première partie de notre théorème.

L'expression (13) est le terme général du développement de

$$\frac{r}{g}\left[1-\frac{2g\mathfrak{M}}{r}(\xi+\eta+\ldots)\right]^{-1},$$

en série entière par rapport à ξ, η, ... Or, en faisant abstraction du facteur constant $\frac{r}{g}$, cette série provient de la substitution de la somme

(14) $$\frac{2g\mathfrak{M}}{r}\xi+\frac{2g\mathfrak{M}}{r}\eta+\ldots$$

à la variable T dans la série entière

$$1+T+T^2+\ldots.$$

Pour sa convergence il suffit (120) que la somme (14), qui se confond avec celle des modules de ses diverses parties, soit inférieure à 1, rayon de convergence de cette dernière série. Il suffit, en particulier, que ces diverses parties soient toutes égales entre elles et inférieures chacune à $\frac{1}{h}$, inverse de leur nombre, c'est-à-dire que l'on ait

$$\xi<\frac{r}{2gh\mathfrak{M}},\quad \eta<\frac{r}{2gh\mathfrak{M}},\quad \ldots$$

Si donc ces inégalités ont lieu, les modules des termes des développements considérés, tous inférieurs aux valeurs correspondantes de l'expression (13), forment à plus forte raison des séries convergentes.

V. Enfin il est à peu près évident que les fonctions (11), sommes

des développements ainsi obtenus, satisfont à toutes les équations (1). Leur structure assigne effectivement à leurs dérivées de tous ordres des valeurs initiales précisément égales à ce que nous appelions tout à l'heure les valeurs initiales des dérivées des intégrales hypothétiques. Entre les valeurs initiales de ces dérivées des fonctions (11), il existe donc toutes les relations dans lesquelles la substitution des lettres υ, φ, ... à u, v, ... et l'hypothèse numérique $x = x_0, y = y_0$, ... changent les relations ultimes du n° 290, et par suite toutes les relations primitives du n° 289 entraînées par celles-ci (290, V). Or les égalités numériques fournies ainsi par les relations primitives expriment directement qu'après substitution des fonctions (11) dans les équations différentielles, les deux membres de chacune deviennent des fonctions de $x, y, \ldots$ dont les dérivées semblables de tous ordres sont égales en x_0, y_0, ... et qui par suite (189) sont égales identiquement.

302. Quand on a obtenu, comme nous venons de l'expliquer, les premiers développements des intégrales ordinaires du système (1) qui répondent aux données initiales (2), (3), il ne reste plus qu'*à en recommencer de nouveaux, en marchant sur tous les chemins praticables issus* de x_0, y_0, ... (172). Cette seconde partie de l'intégration comporte les observations suivantes :

I. *Ces développements ultérieurs des intégrales satisfont identiquement aussi au système* (1). Car l'égalité identique entre les deux membres de chaque équation différentielle, que fait naître la substitution des premiers développements à u, v, ..., entraîne à elle seule la même identité entre les résultats de la substitution de tous développements ultérieurs (252, II).

II. Comme les données initiales déterminent les premiers développements sans ambiguïté aucune, puisque les coefficients de ceux-ci sont fournis par les relations ultimes qui assignent à chacun d'eux une valeur *unique,* comme ensuite chacun des premiers développements détermine complètement tous ceux qui lui succèdent sur des chemins donnés, le schéma de chaque intégrale en $x, y, \ldots$ (172) ne dépend absolument que des données fondamentales (2), (3) et des chemins suivis pour passer de $x_0, y_0, \ldots$ à $x, y, \ldots$.

Sur de mêmes chemins praticables quelconques, un seul groupe de g fonctions de x, y, ... jouit donc de la double propriété de satisfaire, à titre d'intégrales ordinaires, au système immédiat (1) *et de prendre des valeurs numériques données au commencement de ces chemins.*

III. *Deux groupes de g fonctions de x, y, ... sont par suite identiques sur tous les chemins praticables, s'ils sont composés d'intégrales ordinaires d'un pareil système, satisfaisant de part et d'autre à un même ensemble de conditions initiales.*

IV. Ici se présente une nouvelle application de l'observation générale faite au n° 175, I, que nous avons déjà utilisée dans le calcul inverse des dérivées au n° 209, V et ailleurs.

Supposons qu'on ait cheminé de x_0, y_0, ... à x_i, y_i, ..., et qu'on veuille développer les intégrales à partir de ces nouvelles valeurs initiales. Si l'on nomme u_i, v_i, ... les valeurs numériques acquises par ces fonctions en x_i, y_i, ..., les nouveaux développements sont des fonctions de x, y, ... jouissant de la double propriété de se réduire à u_i, v_i, ... pour $x = x_i$, $y = y_i$, ..., et de satisfaire aux équations différentielles considérées (1). Ils coïncident par suite (III) avec les premiers développements des intégrales du système proposé répondant aux données fondamentales x_i, y_i, ..., u_i, v_i, ...

Ainsi donc, *à la génération directe de chaque nouveau développement d'une intégrale isolée, que procure, comme au n°* 172, *la considération de celui qui l'a précédé, on peut substituer l'opération indirecte impliquant les g intégrales à la fois et consistant à revenir aux équations différentielles pour en tirer, comme nous l'avons expliqué au n°* 295, *les premiers développements des intégrales qui sont égales à u_i, v_i, ... pour $x = x_i$, $y = y_i$, ...*

Cette conception de chaque groupe de développements *ultérieurs* comme un groupe de *premiers* développements construits sur les valeurs numériques actuelles de x, y, ..., u, v, ..., transformées en données fondamentales, facilite au plus haut degré l'étude et le maniement des intégrales. On la préfère à toute autre.

V. En particulier, elle rend évidente cette conséquence qui est très importante.

Comme, d'une part, la quantité positive (10), limite inférieure commune des rayons de convergence de premiers développements construits sur les données fondamentales (2), (3) est en fait *absolument indépendante des valeurs particulières de ces dernières,* pourvu bien entendu qu'elles tombent toutes à l'intérieur des aires (4); comme, d'autre part, ainsi qu'on vient de le voir, tous développements ultérieurs peuvent être considérés comme de premiers développements construits sur de nouvelles données fondamentales, *cette même quantité* (10) *constitue aussi une limite inférieure des rayons de convergence des développements ultérieurs, tant que la marche de x, y, ... à l'intérieur des aires S_x, S_y, ... n'entraîne à l'extérieur des aires S_u, S_v, ... la valeur d'aucune des intégrales u, v, ...*

Par suite, *les chemins praticables sont tous ceux qu'on peut tracer dans les aires S_x, S_y, ... à partir de x_0, y_0, ..., avec des côtés de longueurs inférieures à la quantité* (10), *et de manière que les valeurs de u, v, ... restent toutes intérieures aux aires S_u, S_v, ...*

Ainsi donc, *les intégrales sont localement olotropes avec des olomètres au moins égaux à la quantité* (10) (175, IV), *non pas nécessairement dans la totalité des aires S_x, S_y, ..., mais certainement dans toutes portions s_x, s_y, ... de ces aires où le cheminement ne peut faire échapper des aires S_u, S_v, ... la valeur d'aucune intégrale.*

VI. Quand on a tracé les limites extrêmes des aires partielles s_x, s_y, ..., opération en général assez facile, mais exigeant l'intervention des propriétés spéciales des composantes (8) dans chaque cas particulier, *le théorème du n° 201 fait immédiatement connaître les plus grands rayons de convergence des intégrales.* Et, pour peu que ces aires soient étendues, la valeur de la limite inférieure que notre théorie générale assigne aux olomètres perd toute influence sensible sur celle des rayons maximums. On s'attache donc exclusivement *à reculer les limites des aires s_x, s_y, ..., sans s'inquiéter jamais de la valeur numérique de l'expression* (10). Cette dernière considération ôte tout intérêt

à la recherche de limites inférieures plus élevées; c'est en nous contentant de celle-ci, que nous avons pu réaliser dans le raisonnement des simplifications au fond considérables.

Dans le calcul inverse des dérivées (Chap. VIII), la simplicité des développements des intégrales nous a laissé apercevoir immédiatement leurs plus grands rayons de convergence; dans quelques autres cas particuliers on peut encore, sans trop de peine, les découvrir par la discussion des développements eux-mêmes, mais c'est fort rare.

303. L'existence des intégrales, résultant de la double possibilité de former leurs premiers développements, puis de cheminer, se formule très brièvement en disant que *des équations différentielles totales constituant un système immédiat passif possèdent des intégrales ordinaires localement olotropes, aussi longtemps que leurs seconds membres le demeurent eux-mêmes.*

Considérées dans leur ensemble, et pour un système donné, *ces intégrales sont des fonctions déterminées des variables indépendantes et de leurs propres valeurs initiales jouant alors le rôle de nouvelles variables adjointes aux autres;* leurs valeurs ne dépendent effectivement que de celles de toutes ces quantités.

Mais, quand aucune condition initiale n'est annexée au système, *elles sont essentiellement indéterminées relativement aux variables de la question.* Leur indétermination consiste en ce que, outre ces h variables, *elles contiennent les g paramètres représentant leurs valeurs initiales.* Nous constaterons plus tard que les intégrales sont encore olotropes par rapport à ces paramètres. (Chap. XIII *inf.*).

304. En terminant ce Chapitre, recommandons au lecteur de ne pas oublier que la marche suivie pour trouver des intégrales ordinaires au système (1) supposé passif ne diffère pas, dans son essence, de la *Méthode des coefficients indéterminés* (216).

En développant effectivement les seconds membres en séries entières en $x - x_0, y - y_0, \ldots, u - u_0, v - v_0, \ldots$, substituant à $u, v, \ldots$ dans ces équations des séries entières à coefficients indéterminés en $x - x_0, y - y_0, \ldots$ ayant $u_0, v_0, \ldots$ pour premiers termes, et égalant numériquement les coefficients dans les

deux membres des termes semblables par rapport à ces différences, nous aurions obtenu une suite illimitée d'équations de conditions susceptibles de fournir successivement les valeurs des coefficients inconnus, exprimées en fonctions entières de ceux précédemment obtenus et des coefficients des développements des seconds membres. Après quoi, nous aurions pu constater que les séries ainsi obtenues sont convergentes et que leurs sommes satisfont bien aux équations proposées. De cette manière, nous aurions parlé un autre langage; mais nous aurions fait la même chose, à cause de la presque identité des valeurs initiales des dérivées des fonctions avec les coefficients de leurs développements.

CHAPITRE XI.

FONCTIONS IMPLICITES EN GÉNÉRAL.

Existence et différentiation des fonctions implicites dans le cas fondamental.

305. On appelle fonctions *implicites* celles qui sont définies par la condition de satisfaire à un système d'équations finies (283) données entre elles et les variables indépendantes. Ce mode de génération comporte le plus souvent une ambiguïté qui se lève par l'addition de conditions accessoires que nous préciserons au moment voulu. Combiné avec la composition des fonctions (Chap. IX), il permet de tirer d'un nombre excessivement restreint de fonctions primordiales de telle ou telle origine (fonctions rationnelles accompagnées d'une seule transcendante) la presque totalité de celles qui sont les matériaux des calculs usuels.

Dans le problème des fonctions implicites, les données sont les premiers membres des équations génératrices, et il faut de toute nécessité leur connaître des propriétés précises, sans quoi le raisonnement manquerait de base et serait impossible. Nous les supposerons olotropes, eux ou plutôt les composantes dont ils sont formés (281), pour les valeurs qu'il y aura lieu d'attribuer aux quantités qu'ils contiennent. La plupart des autres cas peuvent d'ailleurs être ramenés à celui-ci; sinon l'on se trouve en présence de l'une de ces singularités qui échappent absolument aux méthodes générales (149).

Parmi les fonctions implicites engendrées ainsi par la résolution d'équations simultanées dont les premiers membres sont olotropes, les plus remarquables sont naturellement celles pour lesquelles ces premiers membres sont tous des polynômes entiers. Elles forment la classe immense des *irrationnelles algébriques*,

contenant le groupe relativement très restreint des fonctions provenant de la combinaison des opérations rationnelles avec des extractions de racines.

306. Il nous faut avant tout définir certaines fonctions composées différentielles jouant à l'égard d'un système de plusieurs fonctions un rôle tout semblable à celui que les dérivées premières d'une seule remplissent vis-à-vis d'elle.

Étant données m fonctions

$$(1)\qquad \begin{cases} F_1(X, Y, Z, \ldots, T), \\ F_2(X, Y, Z, \ldots, T), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ F_m(X, Y, Z, \ldots, T) \end{cases}$$

des $n \gtreqless m$ variables X, Y, Z, ..., T, nous appellerons *déterminant différentiel de ce système par rapport à m variables désignées* le déterminant (au signe près) des m^2 dérivées premières de ces fonctions, prises par rapport à ces m variables et écrites dans leur ordre naturel.

Si l'on construit le Tableau

$$(2)\qquad \begin{cases} \dfrac{dF_1}{dX}, & \dfrac{dF_1}{dY}, & \dfrac{dF_1}{dZ}, & \ldots, & \dfrac{dF_1}{dT}, \\ \dfrac{dF_2}{dX}, & \dfrac{dF_2}{dY}, & \dfrac{dF_2}{dZ}, & \ldots, & \dfrac{dF_2}{dT}, \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \dfrac{dF_m}{dX}, & \dfrac{dF_m}{dY}, & \dfrac{dF_m}{dZ}, & \ldots, & \dfrac{dF_m}{dT} \end{cases}$$

des dérivées premières de toutes ces fonctions, dont le nombre des colonnes est égal ou supérieur à celui des lignes, on obtiendra celui d'un déterminant différentiel donné, en associant les m colonnes de ce Tableau qui contiennent les dérivées des fonctions $F_1, \ldots, F_m$ prises par rapport aux variables voulues. Comme nous ne spécifions pas l'ordre de ces m colonnes, chaque déterminant est susceptible de deux déterminations opposées entre lesquelles nous choisirons indifféremment.

Leur nombre total est celui des combinaisons des n colonnes prises m à m; il se réduit à 1 dans le seul cas où $n = m$.

Pour $m = 1$, les déterminants différentiels ne sont plus que les simples dérivées partielles premières de la fonction unique F qui constitue le système.

Les déterminants différentiels sont olotropes aussi longtemps que les fonctions (1) *le sont elles-mêmes;* effectivement ce sont des fonctions composées à composantes entières, c'est-à-dire indéfiniment olotropes, des dérivées (2) qui, toutes, sont nécessairement olotropes en même temps que ces fonctions (165) (250, I).

306 *bis*. Les propriétés générales des déterminants, combinées avec la nature spéciale des développements des diverses dérivées premières d'une même fonction composée (256), conduisent à un développement de forme identique, *pour le déterminant différentiel par rapport à m variables déterminées de m fonctions composées de n* ($\geqq m$) *fonctions simples*. On trouve facilement qu'*il est égal au résultat obtenu en faisant le produit d'un déterminant différentiel des m composantes par rapport à m fonctions simples par celui de ces m fonctions simples par rapport aux m variables considérées, puis la somme des produits de ce genre correspondant à toutes les combinaisons des n fonctions simples prises m à m.*

307. Voici le premier théorème fondamental de la théorie des fonctions implicites.

Si, d'une part, les composantes

(3) $$f_1(x, y, \ldots, u, v, \ldots),\quad f_2,\quad \ldots,\quad f_m$$

des premiers membres de m équations finies simultanées

(4) $$\begin{cases} f_1\,(x, y, \ldots, u, v, \ldots) = 0, \\ f_2\,(x, y, \ldots, u, v, \ldots) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_m(x, y, \ldots, u, v, \ldots) = 0, \end{cases}$$

entre les m fonctions inconnues u, v, ... et les variables indépendantes x, y, ... en nombre quelconque, sont toutes olotropes à l'intérieur des aires limitées

(5) $$S_x,\quad S_y,\quad \ldots,$$

(6) $$S_u,\quad S_v,\quad \ldots,$$

si, d'autre part, dans les mêmes aires, la fonction

$$(7) \qquad \Delta(x, y, \ldots, u, v, \ldots) = \begin{vmatrix} \frac{df_1}{du} & \frac{df_1}{dv} & \cdots \\ \frac{df_2}{du} & \frac{df_2}{dv} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{df_m}{du} & \frac{df_m}{dv} & \cdots \end{vmatrix},$$

déterminant différentiel des m fonctions (3) *pris par rapport aux m variables* u, v, ... (306) *ne s'évanouit jamais, si enfin les quantités*

$$x_0, \; y_0, \; \ldots,$$
$$u_0, \; v_0, \; \ldots$$

sont situées dans les aires (5), (6) *et vérifient numériquement les équations proposées, c'est-à-dire donnent*

$$(8) \quad \begin{cases} f_1(x_0, y_0, \ldots, u_0, v_0, \ldots) = f_2(x_0, y_0, \ldots, u_0, v_0, \ldots) = \ldots \\ \qquad = f_m(x_0, y_0, \ldots, u_0, v_0, \ldots) = 0, \end{cases}$$

le système (4) *de ces dernières admet un groupe unique de solutions qui soient olotropes en* x_0, y_0, ... *et s'y réduisent à* u_0, v_0, ...

Les fonctions dont les premiers développements ont été ainsi obtenus restent localement olotropes et satisfont aux équations (4), *aussi longtemps que* x, y, ... *cheminent dans les aires* (5), *sans entraîner aucune de leurs valeurs à l'extérieur des aires* (6).

I. Admettant pour un instant l'existence des solutions spécifiées dans notre énoncé, que nous représenterons par les mêmes lettres u, v, ..., nous remarquerons qu'étant olotropes en x_0, y_0, ... et y devenant numériquement égales à u_0, v_0, ..., valeurs de x, y, ..., u, v, ... pour lesquelles les composantes (3) sont supposées olotropes, ces solutions substituées dans les premiers membres des équations (4) les transforment en des fonctions com-

posées de $x, y, \ldots$ qui sont toutes olotropes en $x_0, y_0, \ldots$ (**247**). Les fonctions $u, v, \ldots$ satisfont donc non seulement aux équations proposées, mais encore à toutes celles qui s'en déduisent par des différentiations et des combinaisons variées (**282**).

Si, en particulier, on différentie les équations (4) par rapport à x, il viendra

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial f_1}{\partial v}\frac{dv}{dx} + \ldots = 0, \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial f_2}{\partial v}\frac{dv}{dx} + \ldots = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x} + \frac{\partial f_m}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial f_m}{\partial v}\frac{dv}{dx} + \ldots = 0, \end{array} \right.$$

équations linéaires en $\frac{du}{dx}, \frac{dv}{dx}, \ldots$, où les coefficients de ces dérivées sont précisément les éléments du déterminant différentiel Δ. Puisqu'en y considérant $x, y, \ldots, u, v, \ldots$ comme des variables indépendantes, nous supposons essentiellement que cette fonction Δ ne s'évanouit jamais dans les aires (5) (6), le même déterminant considéré comme fonction composée de $x, y, \ldots$ et des solutions $u, v, \ldots$ ne s'annulera ni en $x_0, y_0, \ldots$, ni pour les valeurs de $x, y, \ldots$ suffisamment voisines de celles-ci. En vertu de la théorie des équations linéaires, on pourra donc, au moyen des formules de Cramer, résoudre les équations (9) par rapport à $\frac{du}{dx}$, $\frac{dv}{dx}, \ldots$.

De même pour les systèmes analogues en $\frac{du}{dy}, \frac{dv}{dy}, \ldots$, en $\frac{du}{dz}$, $\frac{dv}{dz}, \ldots, \ldots$ qu'engendreront, après cette différentiation par rapport à x, des différentiations intéressant successivement les autres variables $y, z, \ldots$

Dans tous ces systèmes, les coefficients des dérivées de $u, v, \ldots$ sont invariablement les éléments du déterminant Δ; dans les premiers membres de chacun d'eux, les termes indépendants de ces dérivées sont les dérivées partielles de $f_1, f_2, \ldots, f_m$ par rapport à la variable indépendante intéressée dans la différentiation qui l'a engendrée. Leur résolution successivedonnera donc les lignes,

de m formules chacune,

$$(10)\qquad \left\{\begin{array}{lll} \dfrac{du}{dx} = -\dfrac{\Delta_{ux}}{\Delta}, & \dfrac{dv}{dx} = -\dfrac{\Delta_{vx}}{\Delta}, & \dots, \\ \dfrac{du}{dy} = -\dfrac{\Delta_{uy}}{\Delta}, & \dfrac{dv}{dy} = -\dfrac{\Delta_{vy}}{\Delta}, & \dots, \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots \end{array}\right.$$

où Δ_{ux}, par exemple, représente ce que devient Δ par la substitution de $\frac{\partial f_1}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial x}, \dots, \frac{\partial f_m}{\partial x}$ à $\frac{\partial f_1}{\partial u}, \frac{\partial f_2}{\partial u}, \dots, \frac{\partial f_m}{\partial u}$, c'est-à-dire le déterminant différentiel de $f_1, f_2, \dots, f_m$ par rapport à $x, v, \dots$.

Nous arrivons ainsi à cette conclusion importante que, *si les fonctions implicites u, v, ... existent, elles constituent des intégrales du système des équations différentielles* (10), *lequel est évidemment immédiat et total* (286, 287); *de plus ces intégrales sont ordinaires* (288). Effectivement, pour des valeurs des variables suffisamment voisines de $x_0, y_0, \dots$ dans les aires (5), les valeurs des fonctions u, v, ... restent renfermées dans les aires (6), et, à l'intérieur de ces deux groupes d'aires, les seconds membres des équations (10) sont olotropes, comme rapports des fonctions Δ, Δ_{ux}, ... qui sont toutes olotropes (306) à l'une d'elles Δ que nous supposons essentiellement ne pas s'évanouir (250, III).

II. *Le système immédiat* (10) *est passif* (297) (298).

Les seconds membres des équations différentielles de la première ligne de ce système, que nous représenterons un instant par U_x, V_x, ..., sont des fonctions de $x, y, \dots, u, v, \dots$ qui, en considérant toutes ces quantités comme autant de variables indépendantes, donnent lieu aux identités

$$(11)\qquad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial f_1}{\partial x} + \dfrac{\partial f_1}{\partial u}\,U_x + \dfrac{\partial f_1}{\partial v}\,V_x + \dots = 0, \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x} + \dfrac{\partial f_2}{\partial u}\,U_x + \dfrac{\partial f_2}{\partial v}\,V_x + \dots = 0, \\ \dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x} + \dfrac{\partial f_m}{\partial u}\,U_x + \dfrac{\partial f_m}{\partial v}\,V_x + \dots = 0. \end{array}\right.$$

Car ces dernières relations expriment simplement que les équa-

tions linéaires (9) sont effectivement satisfaites par les valeurs trouvées pour des inconnues notées $\frac{du}{dx}$, $\frac{dv}{dx}$, ...

De même U_y, V_y, ..., seconds membres des équations de la deuxième ligne du système (10), donnent lieu aux identités

$$(12)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial f_1}{\partial y} + \dfrac{\partial f_1}{\partial u} U_y + \dfrac{\partial f_1}{\partial v} V_y + \ldots = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial y} + \dfrac{\partial f_m}{\partial u} U_y + \dfrac{\partial f_m}{\partial v} V_y + \ldots = 0. \end{cases}$$

Cela posé, différentions successivement par rapport à u, v, ..., y la première identité du groupe (11), et ajoutons membre à membre les résultats multipliés respectivement par U_y, V_y, ..., 1. On apercevra facilement que le résultat obtenu est de la forme

$$[1]_{xy} + \frac{\partial f_1}{\partial u} U_{xy} + \frac{\partial f_1}{\partial v} V_{xy} + \ldots = 0,$$

$[1]_{xy}$ désignant un groupe de termes que laisse invariable la permutation de x, y dans les indices et dans les différentielles, où U_{xy}, V_{xy}, ... désignent les expressions ultimes (290) de $\frac{d^2 u}{dx\,dy}$, $\frac{d^2 v}{dx\,dy}$, ... provenant de la différentiation par rapport à y des équations de la première ligne du Tableau (10).

En ajoutant, multipliés par U_x, V_x, ..., 1, les résultats de la différentiation de la première identité du groupe (12) par rapport à u, v, ..., x, on trouve de même

$$[1]_{yx} + \frac{\partial f_1}{\partial u} U_{yx} + \frac{\partial f_1}{\partial v} V_{yx} + \ldots = 0,$$

où $[1]_{yx}$ représente ce que devient $[1]_{xy}$ par la permutation de x, y dans les indices et dans les différentielles, c'est-à-dire ce groupe invariable lui-même, où U_{yx}, V_{yx}, ... représentent les expressions ultimes des mêmes dérivées complexes secondes $\frac{d^2 u}{dx\,dy}$, $\frac{d^2 v}{dx\,dy}$, ..., mais provenant maintenant de la différentiation par rapport à x des équations différentielles de la seconde ligne du Tableau (10).

Si maintenant on traite de la même manière les deuxièmes, troisièmes, ..., $m^{\text{ièmes}}$ identités des deux groupes (11) et (12), et si

l'on soustrait membre à membre les identités de chaque paire obtenue, il vient, à cause de

$$[1]_{xy}-[1]_{yx}=[2]_{xy}-[2]_{yx}=\ldots=[m]_{xy}-[m]_{yx}=0,$$

les identités linéaires et homogènes

$$\begin{gathered}
\frac{\partial f_1}{\partial u}(xy)_u+\frac{\partial f_1}{\partial v}(xy)_v+\ldots=0,\\
\frac{\partial f_2}{\partial u}(xy)_u+\frac{\partial f_2}{\partial v}(xy)_v+\ldots=0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\frac{\partial f_m}{\partial u}(xy)_u+\frac{\partial f_m}{\partial v}(xy)_v+\ldots=0,
\end{gathered}$$

entre $(xy)_u$, $(xy)_v$, ..., premiers membres des conditions de passivité ayant pour origine la considération des dérivées complexes secondes $\dfrac{d^2}{dx\,dy}$ de u, v, ... et écrites de manière à avoir zéro pour seconds membres (299). On en conclut immédiatement

$$(xy)_u=(xy)_v=\ldots=0,$$

parce que, dans ces identités, le déterminant des coefficients est précisément le déterminant différentiel $\Delta(x, y, \ldots, u, v, \ldots)$ que nous supposons essentiellement ne pas s'évanouir.

L'existence des autres conditions de passivité

$$\begin{gathered}
(xz)_u=(xz)_v=\ldots=0,\\
(yz)_u=(yz)_v=\ldots=0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{gathered}$$

s'établit de la même manière.

III. *Le système d'équations différentielles totales* (10) *possède donc un groupe d'intégrales ordinaires* u, v, ... *satisfaisant aux conditions initiales*

$$(13)\qquad \left\{\begin{array}{llll} & u=u_0, & v=v_0, & \ldots,\\ \text{pour} & x=x_0, & y=y_0, & \ldots\end{array}\right.$$

Le théorème du nº 301 lui est effectivement applicable, puisque les seconds membres de ces équations sont olotropes dans les

aires (5), (6) contenant les points $x_0, y_0, \ldots, u_0, v_0, \ldots$, et que leur système est passif (II).

IV. *Ces intégrales satisfont au système des équations finies proposées* (4).

L'ensemble des formules inscrites dans la première ligne du Tableau (10) n'étant au fond que le système d'équations différentielles (9), modifié par une transformation qui est réversible à cause de Δ non $= 0$, les intégrales $u, v, \ldots$ satisfont nécessairement aussi à ces dernières équations, en particulier à la première

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial f_1}{\partial v}\frac{dv}{dx} + \ldots = 0. \tag{14}$$

La considération de la seconde ligne du Tableau (10), de la troisième, etc., donne de même

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial f_1}{\partial y} + \dfrac{\partial f_1}{\partial u}\dfrac{du}{dy} + \dfrac{\partial f_1}{\partial v}\dfrac{dv}{dy} + \ldots = 0, \\ \dfrac{\partial f_1}{\partial z} + \dfrac{\partial f_1}{\partial u}\dfrac{du}{dz} + \dfrac{\partial f_1}{\partial v}\dfrac{dv}{dz} + \ldots = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right. \tag{15}$$

Or les équations (14), (15) expriment précisément que les dérivées premières de la fonction composée de $x, y, \ldots$ engendrée par la substitution de ces intégrales à $u, v, \ldots$ dans

$$f_1(x, y, \ldots, u, v, \ldots)$$

sont toutes nulles identiquement. Donc (193) cette fonction composée se réduit à une certaine constante C_1, d'où l'identité

$$f_1(x, y, \ldots, u, v, \ldots) = C_1.$$

Mais on a nécessairement $C_1 = 0$, à cause des conditions initiales (13) combinées avec la première des égalités numériques (8). On a donc en définitive la relation

$$f_1(x, y, \ldots, u, v, \ldots) = 0,$$

et l'on démontrerait de même que les $m - 1$ autres équations du système proposé sont toutes satisfaites.

Le théorème du n° 252, I étend immédiatement à tous déve-

loppements ultérieurs des intégrales en question cette propriété qu'ont leurs premiers développements, d'annuler identiquement les premiers membres (3) des équations proposées.

V. Les seconds membres des équations différentielles auxiliaires (10) étant tous olotropes dans les aires (5), (6), comme nous l'avons constaté à la fin de l'alinéa I, cette identité complète entre leurs intégrales ordinaires précisées par les conditions initiales (13) et nos fonctions implicites rend applicables à ces dernières toutes les observations faites au n° 302. Celle de son alinéa V entraîne immédiatement la dernière partie de notre théorème.

308. Nous avons à lui ajouter le suivant :

On peut assigner une quantité positive ω *telle que, pour toutes valeurs particulières de* x, y, ... *tombant dans les aires* (5), *et en supposant que la résolution numérique des équations* (4) *donne un premier système de racines*

(16) $$u,\ v,\ \ldots$$

tombant toutes dans les aires (6) *et un autre quelconque*

$$u',\ v',\ \ldots,$$

il arrive de deux choses l'une : ou bien l'on a

(17) $$u' = u,\quad v' = v,\quad \ldots,$$

ou bien quelque module des différences

(18) $$u' - u,\ v' - v,\ \ldots$$

surpasse ω.

En appelant δ une quantité positive inférieure à tous les olomètres des fonctions (3) dans les aires (5), (6) et δ' une autre inférieure à celle-ci, en attribuant à $x, y, \ldots, u, v, \ldots$ des valeurs quelconques, mais toutes intérieures aux mêmes aires, puis des accroissements

$$\mathfrak{x},\ \mathfrak{y},\ \ldots,\ \mathfrak{u},\ \mathfrak{v},\ \ldots$$

de modules $\leqq \delta'$, on peut écrire pour chacun des premiers membres

des équations (4)

$$(19)\quad \begin{cases} f(x+\mathfrak{x}, y+\mathfrak{y}, \ldots, u+\mathfrak{u}, v+\mathfrak{v}, \ldots) \\ \quad = f(x, y, \ldots, u, v, \ldots) + \mathrm{X}\mathfrak{x} + \mathrm{Y}\mathfrak{y} + \ldots + \mathrm{U}\mathfrak{u} + \mathrm{V}\mathfrak{v} + \ldots \end{cases}$$

avec

$$\mathrm{U} = \frac{df}{du} + \mathrm{U}^{(\mathfrak{x})}\mathfrak{x} + \ldots + \mathrm{U}^{(\mathfrak{u})}\mathfrak{u} + \ldots,$$

$$\mathrm{V} = \frac{df}{dv} + \mathrm{V}^{(\mathfrak{x})}\mathfrak{x} + \ldots + \mathrm{V}^{(\mathfrak{u})}\mathfrak{u} + \ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

et, dans toutes ces formules, les multiplicateurs des accroissements sont des fonctions de $x, y, \ldots, u, v, \ldots, \mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \ldots, \mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \ldots$, aux modules desquelles on peut assigner des limites supérieures fixes pour toutes les combinaisons de valeurs de leurs variables que nous venons de définir (200).

Il en résulte que pour le déterminant

$$\mathrm{D} = \begin{vmatrix} \mathrm{U}_1 & \mathrm{V}_1 & \ldots \\ \mathrm{U}_2 & \mathrm{V}_2 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathrm{U}_m & \mathrm{V}_m & \ldots \end{vmatrix}$$

on peut écrire

$$\mathrm{D} = \Delta + \mathrm{E},$$

Δ représentant toujours le déterminant différentiel (7), E désignant la somme des produits de monômes entiers, de degrés $\geqq 1$, en $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \ldots, \mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \ldots$, par des fonctions dont tous les modules restent inférieurs à certaines quantités positives toutes indépendantes des variables $x, y, \ldots, u, v, \ldots$ et de leurs accroissements.

Comme Δ est supposé essentiellement ne jamais s'évanouir dans les aires (5), (6), il existe certainement une quantité positive invariable θ au-dessous de laquelle son module ne peut s'y abaisser (186). En appelant enfin ε une quantité positive $< \theta$, la nature de l'expression E permet évidemment d'assigner au-dessous de δ' une autre quantité positive ω telle que, pour

$$(20)\quad \operatorname{mod}\mathfrak{x} \leqq \omega, \quad \operatorname{mod}\mathfrak{y} \leqq \omega, \quad \ldots, \quad \operatorname{mod}\mathfrak{u} < \omega, \quad \operatorname{mod}\mathfrak{v} < \omega, \quad \ldots,$$

on ait toujours

$$\operatorname{mod}\mathrm{E} < \varepsilon,$$

et, par suite, à cause de $\operatorname{mod} \Delta > \theta$,

$$\operatorname{mod} D > \theta - \varepsilon,$$

c'est-à-dire

$$(21) \qquad D \text{ non} = 0.$$

Supposons maintenant que $u, v, \ldots$ représentent les racines (16), que les modules des différences (17) soient tous $\leqq \omega$, et faisons dans tout ce qui précède

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{y} = \ldots = 0, \qquad \mathfrak{u} = u' - u, \qquad \mathfrak{v} = v' - v, \qquad \ldots,$$

quantités satisfaisant alors aux inégalités (20).

Ces hypothèses, combinées avec les égalités

$$f(x, y, \ldots, u, v, \ldots) = 0,$$
$$f(x, y, \ldots, u + \mathfrak{u}, v + \mathfrak{v}, \ldots) = f(x, y, \ldots, u', v', \ldots) = 0,$$

transforment les relations générales (19) en

$$\begin{cases} U_1 \mathfrak{u} + V_1 \mathfrak{v} + \ldots = 0, \\ U_2 \mathfrak{u} + V_2 \mathfrak{v} + \ldots = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ U_m \mathfrak{u} + V_m \mathfrak{v} + \ldots = 0, \end{cases}$$

système linéaire et homogène de m équations entre les m différences (18), qui, par suite de l'inégalité (21), donne

$$\mathfrak{u} = \mathfrak{v} = \ldots = 0,$$

c'est-à-dire les égalités (17) constituant l'alternative que nous n'avions pas écartée.

309. Ce théorème fournit au précédent un complément indispensable, car on en conclut immédiatement qu'*en fait de solutions, olotropes ou non, mais tendant vers $u_0, v_0, \ldots$ en même temps que $x, y, \ldots$ vers $x_0, y_0, \ldots$, le système fini* (4) *ne possède absolument que les intégrales des équations différentielles* (10) *considérées tout à l'heure.* Il n'y a donc pas à craindre que l'intégration de ces équations laisse échapper quelque groupe de solutions qui ne seraient pas olotropes.

Nous verrons, dans le Chapitre I de notre deuxième Partie, que ces deux propositions forment la base naturelle de la résolution des équations numériques.

310. Tous ces résultats peuvent encore être condensés dans cette énonciation abrégée : *Aussi longtemps que les premiers membres des équations* (4) *demeurent olotropes et que leur déterminant différentiel pris par rapport à* u, v, ... *ne s'évanouit pas, les fonctions implicites définies par leur système sont localement olotropes et restent numériquement distinctes de toutes autres qui ne leur seraient pas identiquement égales.*

En particulier, *deux groupes de fonctions sont nécessairement identiques sur tous les chemins praticables, quand ils satisfont à un même ensemble d'équations finies de la forme du système* (4) *et de conditions numériques initiales.*

La résolution des équations finies (4) ayant été ramenée exactement à l'intégration des équations différentielles (10), nous ne pouvons plus que nous référer aux observations générales qui terminent le Chapitre précédent. Nous dirons toutefois que la considération des équations finies données, elles-mêmes, procure souvent pour la délimitation des aires partielles s_x, s_y, ... du n° 302, V, des renseignements que fournirait bien plus difficilement celle des équations différentielles auxiliaires. En théorie, la différence est presque insignifiante; dans la pratique, elle peut être considérable.

Les solutions (fonctions intégrales) d'un système d'équations différentielles totales sont essentiellement indéterminées (303); pour un système d'équations finies au contraire (cela tout au moins dans le cas fondamental qui nous occupe), il importe de remarquer que si elles peuvent être *ambiguës,* en ce sens qu'il peut en exister plus d'un groupe, *elles sont essentiellement déterminées.*

Ajoutons enfin qu'ici comme ailleurs (216) (277) (304), la méthode suivie n'est encore au fond que celle des coefficients indéterminés.

311. *Quand les conditions nécessaires à l'existence du théorème du* n° 307 *sont remplies, les dérivées de tous ordres*

des fonctions implicites sont exprimables en fonctions composées finies des variables indépendantes et des fonctions implicites elles-mêmes. Les expressions de celles d'ordre k renferment seulement, et cela d'une manière rationnelle, les dérivées partielles d'ordre $\overline{\gtrless} k$ des premiers membres des équations génératrices (4).

Pour le premier ordre, les expressions voulues sont fournies par les équations différentielles (10) dont les seconds membres sont composés rationnellement avec les dérivées premières des premiers membres $f_1, f_2, \ldots, f_m$ des équations génératrices.

Pour les ordres supérieurs, ces expressions sont évidemment ce que nous avons appelé les expressions ultimes des dérivées des intégrales du système immédiat passif dont il s'agit (**290**).

312. Les expressions primitives (**289**) des dérivées des intégrales des équations différentielles auxiliaires (10), les autres expressions des mêmes dérivées auxquelles conduiraient toutes les combinaisons possibles des relations primitives, fournissent pour les dérivées des fonctions implicites définies par les équations (4) une infinité d'autres représentations par des fonctions composées, alors différentielles mais d'ordres moindres, de ces mêmes fonctions implicites. La considération de ces diverses formes peut être utile, mais il serait tout à fait oiseux d'insister sur leur spécification.

Dans le cas très fréquent, par exemple, où il s'agit d'une seule équation

$$f(x, u) = 0,$$

définissant une fonction implicite u de la seule variable x, la différentiation indéfinie de cette équation conduit aux équations différentielles

$$\frac{\partial f}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial f}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial u}\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial u\,\partial x}\frac{du}{dx} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial u}\frac{d^3u}{dx^3} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

dont la première donne $\frac{du}{dx}$. La seconde fournit $\frac{d^2u}{dx^2}$ exprimée au moyen de x, u, $\frac{du}{dx}$; en chassant totalement $\frac{du}{dx}$ déjà obtenue, on trouve l'expression ultime de $\frac{d^2u}{dx^2}$; cette élimination faite partiellement fournit d'autres expressions pour la même dérivée. De même pour $\frac{d^3u}{dx^3}$, et ainsi de suite.

Aucune de ces formules n'est illusoire, à cause de l'hypothèse fondamentale $\frac{\partial f}{\partial u}$ non $= 0$.

Examen sommaire des autres cas. — Élimination en général.

313. Le fait qu'une fonction analytique donnée cesse d'être olotrope est exceptionnel, comme nous l'avons dit maintes fois, comme la suite de cet Ouvrage en fournira la pleine conviction. Cet autre fait que le déterminant différentiel de fonctions données s'évanouit n'est pas moins exceptionnel, parce qu'il constitue une condition étroite qui est réalisée dans le cas *unique* où ce déterminant est $= 0$, qui ne l'est pas au contraire dans les cas en *nombre illimité* où sa valeur est une quantité quelconque non $= 0$. Il résulte de cette double observation la conséquence importante, que *le cas où nous nous sommes placés dans le paragraphe précédent pour résoudre le problème des fonctions implicites* (*en nombre égal à celui des équations génératrices*) *est de beaucoup le plus général.*

Toutes les fois que le contraire ne sera pas spécifié, *nous supposerons donc tacitement réalisées toutes les conditions qui le définissent.*

Les autres cas du même problème tantôt se ramènent à celui-ci, tantôt exigent pour être traités des considérations particulières, habituellement très laborieuses, dans lesquelles il nous est impossible de nous engager à fond. Nous pouvons cependant faire plusieurs remarques générales d'une grande utilité.

314. Nous établirons d'abord quelques propositions qui nous seront utiles ici et dans d'autres circonstances.

Soient

$$(1)\qquad \begin{cases} f_1(t_1, t_2, \ldots, t_n), \\ f_2(t_1, t_2, \ldots, t_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ f_\mu(t_1, t_2, \ldots, t_n), \end{cases}$$

$$(2)\qquad f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$$

$\mu + 1$ *fonctions de* $n > \mu$ *variables indépendantes*

$$(3)\qquad t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_n.$$

Si l'une d'elles se réduit à une fonction composée de quelques-unes des autres, les déterminants différentiels (**306**) *de ces* $\mu + 1$ *fonctions sont tous identiquement nuls.*

Réciproquement, si ces déterminants sont identiquement nuls, mais non ceux des μ *premières* (1) *tous à la fois, la dernière* (2) *est certainement exprimable en fonction composée des autres* (1).

Supposons que l'on ait, par exemple,

$$f = F(f_i, f_j, \ldots),$$

F désignant une certaine composante, d'où (**256**)

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt_1} &= \frac{\partial F}{\partial f_i}\frac{df_i}{dt_1} + \frac{\partial F}{\partial f_j}\frac{df_j}{dt_1} + \ldots, \\ \frac{df}{dt_2} &= \frac{\partial F}{\partial f_i}\frac{df_i}{dt_2} + \frac{\partial F}{\partial f_j}\frac{df_j}{dt_2} + \ldots, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{df}{dt_{\mu+1}} &= \frac{\partial F}{\partial f_i}\frac{df_i}{dt_{\mu+1}} + \frac{\partial F}{\partial f_j}\frac{df_j}{dt_{\mu+1}} + \ldots. \end{aligned}$$

Il résulte de ces dernières relations que, dans le déterminant d'ordre $\mu + 1$

$$\begin{vmatrix} \frac{df_1}{dt_1} & \frac{df_1}{dt_2} & \cdots & \frac{df_1}{dt_{\mu+1}} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{df_\mu}{dt_1} & \frac{df_\mu}{dt_2} & \cdots & \frac{df_\mu}{dt_{\mu+1}} \\ \frac{df}{dt_1} & \frac{df}{dt_2} & \cdots & \frac{df}{dt_{\mu+1}} \end{vmatrix},$$

les éléments de la dernière ligne sont exprimables d'une même manière linéaire et homogène, au moyen des éléments de mêmes colonnes dans les lignes de rangs i, j, ... Ce déterminant, qui est précisément le déterminant différentiel des $\mu+1$ fonctions proposées par rapport aux $\mu+1$ variables $t_1, t_2, \ldots, t_{\mu+1}$, s'évanouit donc quelles que soient $t_1, t_2, \ldots, t_n$. Et l'on prouvera de la même manière qu'il en est ainsi pour tout autre déterminant différentiel de ces $\mu+1$ fonctions.

Pour démontrer la réciproque, appelons $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\mu$ les valeurs variables des fonctions (1), résultant de l'attribution aux variables indépendantes des valeurs notées par $t_1, t_2, \ldots, t_n$. Entre toutes ces quantités, il existera les μ équations finies

$$(4)\qquad \left\{\begin{array}{l} f_1(t_1, t_2, \ldots, t_\mu, t_{\mu+1}, \ldots, t_n) = \varphi_1, \\ f_2(t_1, t_2, \ldots, t_\mu, t_{\mu+1}, \ldots, t_n) = \varphi_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ f_\mu(t_1, t_2, \ldots, t_\mu, t_{\mu+1}, \ldots, t_n) = \varphi_\mu. \end{array}\right.$$

Et si, pour fixer les idées, on suppose que $t_1, t_2, \ldots, t_\mu$ soit un des groupes de μ variables par rapport auxquelles le déterminant différentiel des fonctions (1) n'est pas identiquement nul, la résolution des équations simultanées (4) fournira ces μ quantités en fonctions olotropes des $n-\mu$ autres variables $t_{\mu+1}, \ldots, t_n$ et de $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\mu$, cela en vertu du théorème fondamental du n° 307, et en exceptant naturellement les combinaisons particulières de valeurs des quantités de la question, pour lesquelles le déterminant considéré viendrait à s'évanouir numériquement.

Si donc on substitue ces expressions de $t_1, t_2, \ldots, t_\mu$ dans la fonction (2), on la transformera en une certaine fonction composée de $t_{\mu+1}, t_{\mu+2}, \ldots, t_n, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\mu$,

$$(5)\qquad \Phi(t_{\mu+1}, t_{\mu+2}, \ldots, t_n, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\mu),$$

à laquelle sont applicables les règles de différentiation des nos 253 *et suiv.*

On trouvera donc notamment

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi}{dt_{\mu+1}} &= \frac{\partial f}{\partial t_{\mu+1}} + \frac{\partial f}{\partial t_1}\frac{dt_1}{dt_{\mu+1}} + \frac{\partial f}{\partial t_2}\frac{dt_2}{dt_{\mu+1}} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial t_\mu}\frac{dt_\mu}{dt_{\mu+1}} \\ &= \left(\Delta\frac{\partial f}{\partial t_{\mu+1}} - \Delta_{t_1 t_{\mu+1}}\frac{\partial f}{\partial t_1} - \Delta_{t_2 t_{\mu+1}}\frac{\partial f}{\partial t_2} - \ldots - \Delta_{t_\mu t_{\mu+1}}\frac{\partial f}{\partial t_\mu}\right) : \Delta \end{aligned}$$

conformément à la règle de différentiation des fonctions implicites $t_1, t_2, \ldots, t_\mu$ (311), les lettres Δ, $\Delta_{t_1 t_{\mu+1}}$, ... ayant des significations analogues à celles de Δ, Δ_{ux}, ... dans les équations (10) du n° 307. On en conclut

$$\frac{d\Phi}{dt_{\mu+1}} = 0$$

identiquement, parce que, en vertu des hypothèses admises, le dénominateur Δ, déterminant différentiel des fonctions (1) par rapport à $t_1, t_2, \ldots, t_\mu$, n'est pas nul, tandis que le numérateur qui est précisément celui des $\mu + 1$ fonctions (1), (2) par rapport à $t_1, t_2, \ldots, t_\mu, t_{\mu+1}$ est au contraire nul identiquement.

Comme on trouve de même

$$\frac{d\Phi}{dt_{\mu+2}} = \frac{d\Phi}{dt_{\mu+3}} = \ldots = \frac{d\Phi}{dt_n} = 0,$$

les dérivées premières de Φ par rapport à $t_{\mu+1}, t_{\mu+2}, \ldots, t_n$ sont toutes nulles identiquement; cette fonction se trouve être indépendante de ces variables (194) et se réduit, par suite, à une simple fonction de ses autres variables $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\mu$, savoir

$$F(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\mu).$$

On a donc bien, quelles que soient $t_1, t_2, \ldots, t_n$,

$$\begin{aligned} f(t_1, t_2, \ldots, t_n) &= F(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\mu) \\ &= F[f_1(t_1, t_2, \ldots, t_n), f_2, \ldots, f_\mu]. \end{aligned}$$

315. Si $n = \mu$, l'énoncé précédent se change en celui-ci :

Si μ fonctions données de μ variables ont leur déterminant différentiel non identiquement nul, toute autre fonction des mêmes variables se réduit à une certaine fonction composée de celles-ci.

La démonstration est la même, à cela près qu'alors la fonction composée (5) ne contient plus en fait que $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\mu$, et qu'elle s'allège de la partie du raisonnement servant à prouver que cette fonction ne dépend pas d'autre chose.

316. Quand, outre les variables (3), les fonctions (1), (2) en

contiennent d'autres

(6) $$s_1,\ s_2,\ \dots$$

en nombre quelconque, les deux théorèmes précédents donnent facilement celui-ci qui les contient tous deux :

En supposant non tous nuls identiquement les déterminants différentiels des μ *fonctions* (1) *pris par rapport aux variables* (3) *seulement, la condition nécessaire et suffisante pour que la fonction* (2) *se réduise à quelque fonction composée des* μ *fonctions* (1) *et des variables* (6) *est, ou bien que* $\mu < n$ *et que les déterminants différentiels des* $\mu + 1$ *fonctions* (1), (2) *par rapport aux variables* (3) *soient tous identiquement nuls, ou bien que* $\mu = n$.

317. Étant donné un système de relations existant entre certaines quantités variables, on nomme *élimination* d'un groupe de ces quantités entre les relations dont il s'agit l'opération consistant à déduire de ces dernières quelque autre relation ne contenant plus les quantités qui constituent le groupe partiel considéré.

Entre m équations finies

(7) $$\begin{cases} f_1(t_1, t_2, \dots, t_N) = 0, \\ f_2(t_1, t_2, \dots, t_N) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f_m(t_1, t_2, \dots, t_N) = 0, \end{cases}$$

liant les variables $t_1, t_2, \dots, t_N$ *en nombre quelconque* N, *on peut toujours éliminer* $n(\leqq N)$ *de ces dernières, par exemple*

(8) $$t_1,\ t_2,\ \dots,\ t_n,$$

dans l'un ou l'autre des deux cas suivants : 1° *si m est* $> n$; 2° *si m est* $\overline{\overline{<}}\, n$ *et qu'alors les déterminants différentiels des premiers membres par rapport à m quelconques des n variables* (8) *soient tous identiquement nuls.*

Si les dérivées premières de f_1 par rapport aux variables (8) sont toutes identiquement nulles, cette fonction est indépendante

de ces dernières (194); en d'autres termes, la première des équations (7) ne les contient pas et, par suite, elle constitue par elle-même une relation d'où elles sont éliminées.

Sinon, et en nous plaçant d'abord dans le second cas, adjoignons à f_1, f_2, puis à ces deux-ci f_3, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on ait obtenu un groupe de ces fonctions $f_1, f_2, f_3, \ldots, f_g$, dont les déterminants différentiels par rapport à g quelconques des variables (8) ne soient pas tous identiquement nuls, mais tels que ceux de $f_1, f_2, \ldots, f_g, f_{g+1}$ par rapport à $g+1$ quelconques des mêmes variables le soient au contraire tous. En vertu de l'hypothèse, g est essentiellement $< m$, par suite $< n$, et, en vertu du théorème du numéro précédent, on a identiquement

$$f_{g+1}(t_1, t_2, \ldots, t_N) = F(f_1, f_2, \ldots, f_g, t_{n+1}, t_{n+2}, \ldots, t_N).$$

Les $g+1$ premières équations (7) entraînent donc à elles seules

$$0 = F(0, 0, \ldots, 0, t_{n+1}, t_{n+2}, \ldots t_N),$$

équation d'où les variables (8) sont éliminées.

Nous plaçant maintenant dans le premier cas, nous formerons encore le groupe $f_1, f_2, \ldots, f_g$ ci-dessus défini, en nous arrêtant à $g = n$ quand on peut aller jusque-là. Si g est $< n$, il est *a fortiori* $< m$ et le raisonnement ci-dessus conduit à la même conclusion. Si $g = n$, $n+1$ ne surpasse pas m et l'on a, d'après la dernière partie du théorème du n° 316,

$$f_{n+1} = F(f_1, f_2, \ldots, f_n, t_{n+1}, t_{n+2}, \ldots, t_N),$$

d'où comme ci-dessus, si les équations (7) sont supposées avoir lieu,

$$0 = F(0, 0, \ldots, 0, t_{n+1}, t_{n+2}, \ldots, t_N),$$

équation nouvelle dont les variables (8) sont encore éliminées.

318. A l'aide de ce théorème on trouvera facilement, dans chaque cas particulier, de combien de manières on peut éliminer des quantités données, de relations finies existant entre elles. Nous n'avons pas à entrer dans ces détails, d'ailleurs sans difficultés. On retiendra seulement cette observation qu'il rend

évidente : *Entre $m+q$ relations on peut toujours éliminer m variables et cela de q manières au moins.*

319. Arrivant au problème général des fonctions implicites, considérons un système de M équations finies

$$(9)\qquad \begin{cases} f_1(x, y, \ldots, u, v, \ldots) = 0, \\ f_2(x, y, \ldots, u, v, \ldots) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ f_M(x, y, \ldots, u, v, \ldots) = 0, \end{cases}$$

entre les g fonctions inconnues

$$(10)\qquad u,\quad v,\quad \ldots$$

des h variables indépendantes

$$(11)\qquad x,\quad y,\quad \ldots,$$

les entiers M, g, h ayant des valeurs quelconques.

A l'aide du théorème du n° 316 on peut partager ce système en deux autres partiels, par exemple

$$(12)\qquad \begin{cases} f_1(x, y, \ldots, u, v, \ldots) = 0, \\ f_2(x, y, \ldots, u, v, \ldots) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ f_m(x, y, \ldots, u, v, \ldots) = 0 \end{cases}$$

et

$$(13)\qquad \begin{cases} f_{m+1}(x, y, \ldots, u, v, \ldots) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ f_M\;(x, y, \ldots, u, v, \ldots) = 0, \end{cases}$$

jouissant de cette propriété qu'en considérant les variables (10), (11) comme *toutes* indépendantes les unes des autres, aucune des fonctions

$$(14)\qquad f_1,\quad f_2,\quad \ldots,\quad f_m$$

ne se réduise à quelque fonction composée des autres entrant dans ce même groupe et des variables (11), mais que toute fonction du groupe

$$f_{m+1},\quad f_{m+2},\quad \ldots,\quad f_M$$

soit au contraire exprimable en fonction composée de celles du

groupe (14) et des variables (11), en sorte qu'on ait, quelles que soient $x, y, \ldots, u, v, \ldots,$

$$(15)\quad \begin{cases} f_{m+1} = F_{m+1}(f_1, f_2, \ldots, f_m, x, y, \ldots), \\ f_{m+2} = F_{m+2}(f_1, f_2, \ldots, f_m, x, y, \ldots), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_M \quad = F_M \quad (f_1, f_2, \ldots, f_m, x, y, \ldots), \end{cases}$$

D'après le théorème cité, on aura $m \overline{\overline{<}} g$ et les déterminants différentiels des fonctions (14), pris par rapport aux quantités (10) seulement, ne s'évanouiront pas tous identiquement, nous voulons dire quelles que soient $x, y, \ldots, u, v, \ldots.$

Cela posé, nous distinguerons les trois cas suivants :

I. *On n'a pas simultanément*

$$(16)\quad \begin{cases} F_{m+1}(0, 0, \ldots, 0, x, y, \ldots) = 0, \\ F_{m+2}(0, 0, \ldots, 0, x, y, \ldots) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_M \quad (0, 0, \ldots, 0, x, y, \ldots) = 0, \end{cases}$$

quelles que soient $x, y, \ldots.$

Le système proposé (9) *est alors impossible,* car, s'il existait des fonctions $u, v, \ldots,$ de $x, y, \ldots$ satisfaisant à toutes les équations de ce système, leur substitution dans les identités (15) qui réduirait identiquement à zéro toutes les fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_m, f_{m+1}, \ldots, f_M,$ donnerait les conditions (16) qui sont supposées n'être pas toutes remplies.

II. *Les conditions* (16) *sont remplies et l'on a* $m = g$.

Il est clair que si le système partiel (12) est résoluble, ses racines, à cause des identités (15) et des conditions (16), satisfont aussi à toutes les équations (9). La résolution du système proposé est donc ramenée à celle du système *réduit, équivalent* (12) que l'on dit *complet,* parce que les équations y sont en même nombre que les fonctions inconnues.

Ce système réduit est de ceux auxquels s'applique le théorème fondamental du n° 307, à cela près qu'on ignore s'il possède quelque groupe de solutions numériques initiales n'annulant pas

le déterminant différentiel de ses premiers membres par rapport aux fonctions inconnues. L'existence d'un pareil groupe de solutions étant l'occurrence de beaucoup la plus fréquente, comme nous le verrons bientôt (320, *inf.*), on peut dire que, *dans le cas qui nous occupe, le système partiel* (12) *et par suite le proposé sont en général possibles et déterminés,* c'est-à-dire qu'ils admettent un seul système de racines satisfaisant aux conditions initiales qu'on aura choisies.

III. *Les conditions* (16) *sont remplies, mais on a* $m < g$.

Le système réduit (12) équivalent au proposé (9) est dit alors *incomplet.* En supposant que $u, \ldots$ constituent un des groupes de m des quantités (10) par rapport auxquelles le déterminant différentiel de ses premiers membres n'est pas identiquement nul, et en admettant toujours l'existence de quelque groupe de solutions numériques initiales $x_0, y_0, \ldots, u_0, v_0, \ldots$ n'annulant pas ce déterminant, l'alinéa précédent montre que le système réduit est possible et déterminé par rapport aux m inconnues $u, \ldots$ considérées comme fonctions de $x, y, \ldots$ et des $g - m$ autres inconnues $v, \ldots$.

Il en résulte immédiatement que *le système réduit et par suite le proposé sont possibles mais indéterminés.* L'indétermination consiste en ce qu'*on peut y prendre égales à telles fonctions qu'on voudra* (*se réduisant toutefois à* $v_0, \ldots$ *pour* $x = x_0$, $y = y_0, \ldots$), *les* $g - m$ *inconnues* $v, \ldots$ *restant dans le groupe total* (10) *après l'enlèvement d'un groupe partiel* $u, \ldots$ *correspondant à tout déterminant différentiel des premiers membres qui n'est pas identiquement nul.*

IV. Le point essentiel à retenir de cette discussion est que *tous les cas du problème des fonctions implicites où il n'y a pas impossibilité immédiate se ramènent à celui d'un système réduit, c'est-à-dire dans lequel les déterminants différentiels des premiers membres par rapport aux fonctions inconnues ne sont pas tous identiquement nuls.*

Et si un système réduit est possible, il est déterminé ou indéterminé selon qu'il est complet ou incomplet.

Comme la résolution d'un système réduit incomplet s'effectue par celle d'un système réduit complet, on voit finalement que

les systèmes de cette dernière sorte s'imposent à notre attention d'une manière presque exclusive. Le choix que nous avons fait du n° **307** pour base de toute cette théorie se trouve ainsi pleinement justifié.

Toutes les formules générales relatives aux fonctions implicites sous-entendent essentiellement la réalisation préalable des diverses conditions sous lesquelles nous l'avons énoncé; il importe de ne pas l'oublier (*cf.* **248**).

320. L'existence des racines d'un système réduit complet dépend de celle de quelque groupe de solutions numériques des équations proposées, à prendre pour valeurs initiales des variables indépendantes et des fonctions implicites inconnues. Les considérations suivantes que nous pouvons nous borner à exposer pour une seule équation

$$f(x, y, \ldots, u) = 0, \tag{17}$$

à résoudre par rapport à l'unique fonction inconnue u, montreront que la non-existence de pareilles solutions est un fait possible sans doute, mais exceptionnel.

Comme cette équation est supposée constituer un système réduit, on n'a pas $\frac{df}{du} = 0$, quelles que soient $x, y, \ldots, u$; par suite on peut, cela même d'une infinité de manières, trouver pour ces quantités des valeurs

$$x_0, \quad y_0, \quad \ldots, \quad u_1 \tag{18}$$

qui n'annulent pas cette dérivée. Si l'on appelle t_1 la quantité

$$f(x_0, y_0, \ldots, u_1),$$

il est évident que pour $t = t_1$, $u = u_1$, l'équation entre t, u

$$f(x_0, y_0, \ldots, u) - t = 0$$

est satisfaite et que la dérivée partielle de son premier membre par rapport à u ne s'évanouit pas.

Elle définit ainsi pour u une fonction de t, olotrope en t_1 et s'y réduisant à u_1 (**307**). On pourra donc commencer un chemine-

ment à partir de $t = t_1$; et si on peut le poursuivre jusqu'en $t = 0$, il est clair que la valeur finale u_0 acquise ainsi par u constituera avec $x_0, y_0, \ldots$ un groupe de solutions numériques de l'équation proposée (17), puisqu'on aura

$$f(x_0, y_0, \ldots, u_0) = 0.$$

Pour que le cheminement considéré soit impraticable, il faut que dans toutes les directions on soit arrêté par quelque valeur de u annulant $f'_u(x_0, y_0, \ldots, u)$, ou bien par une diminution progressive de l'olomètre de la fonction implicite u, qui rendrait la valeur $t = 0$ impossible à atteindre; et il faut que de pareils obstacles surgissent pour les combinaisons en nombre infini de valeurs numériques dont les quantités (18) sont susceptibles, pour que l'équation (17) ne puisse être résolue numériquement. Or, en thèse générale, *un événement incertain de nature quelconque est ordinaire ou extraordinaire, selon que sa production est subordonnée à la non-réalisation ou à la réalisation de quelque condition positive.* Nous sommes donc fondé à considérer l'impossibilité de la résolution numérique de cette équation comme l'exception, et la possibilité comme l'hypothèse sur laquelle il convient d'asseoir de préférence les théories générales.

Un raisonnement identique conduit à la même conclusion pour un système réduit complet quelconque.

321. Quand dans un système réduit complet tel que celui étudié au n° **307** (les considérations du n° **319**, IV nous dispensent de nous occuper des autres), le déterminant différentiel des premiers membres par rapport aux fonctions inconnues a une valeur initiale nulle, le théorème fondamental cesse d'être applicable et l'on retombe dans l'inconnu. L'étude générale de ce qui se passe alors présente des complications extrêmes, des difficultés non moindres tenant sans aucun doute à l'imperfection très grande où est encore restée la théorie des équations simultanées entières. On a pu cependant la faire complètement dans le cas le plus simple, celui d'une seule équation définissant une fonction implicite d'une variable unique. Ce que nous exposerons à ce sujet dans notre deuxième Partie montre par induction que *le système*

des équations proposées offre alors, non plus un seul, mais plusieurs groupes de racines satisfaisant aux conditions initiales: ces solutions peuvent d'ailleurs être olotropes ou non, en totalité ou en partie, suivant les circonstances.

322. Il peut arriver enfin que dans le système (4) du n° 307, supposé réduit et complet, le déterminant différentiel des premiers membres par rapport aux fonctions inconnues, sans être nul identiquement, c'est-à-dire quelles que soient x, y, ..., u, v, ... considérées comme autant de variables indépendantes les unes des autres, *s'évanouisse cependant pour tous les groupes de valeurs de ces quantités qui satisfont numériquement aux équations de ce système.* L'examen du cas simple mentionné dans le numéro précédent est encore possible; il indique encore par induction que *chaque système de racines des équations proposées, olotropes ou non, est alors multiple,* ce mot ayant le sens qu'on lui donne dans la théorie algébrique des racines égales, et qu'*une opération d'abaissement, analogue à celle qu'on exécute dans cette théorie, permet de ramener le système à un autre n'offrant plus que des groupes simples de racines.*

Par exemple, en choisissant arbitrairement une fonction olotrope $\varphi(x, y, \ldots)$ et un entier positif $\mu > 1$, l'équation

$$f(x, y, \ldots, u) = [u - \varphi(x, y, \ldots)]^\mu = 0$$

constitue un système de ce genre. Effectivement la dérivée partielle

$$\frac{df}{du} = \mu[u - \varphi(x, y, \ldots)]^{\mu-1},$$

qui représente ici le déterminant différentiel, n'est pas identiquement nulle, mais elle s'évanouit cependant quand on donne à x, y, ... des valeurs quelconques et à u la valeur $\varphi(x, y, \ldots)$, les seules qui puissent vérifier simultanément l'équation considérée.

Or cette équation définit évidemment la fonction implicite unique

$$u = \varphi(x, y, \ldots),$$

qui peut en être considérée comme une racine du degré μ de mul-

tiplicité et qu'on obtient tout aussi bien, mais non multiple, en résolvant l'équation bien plus simple

$$u - \varphi(x, y, \ldots) = 0.$$

323. Les fonctions non olotropes constituant, comme nous l'avons dit et redit, une exception échappant à toute méthode générale, nous n'avons pas à nous occuper des systèmes d'équations finies où quelques premiers membres seraient des fonctions de cette espèce. Disons cependant qu'en fait et toutes les fois qu'il s'agit d'équations vraiment *analytiques*, c'est-à-dire offrant un intérêt réel dans l'Analyse pure ou appliquée, des transformations convenables permettent toujours de ramener un cas semblable à l'un de ceux que nous avons examinés.

Changement des variables en général.

324. Toute question d'Analyse comporte la considération d'un certain ensemble de quantités liées les unes aux autres par diverses relations, et les calculs s'édifient après le choix de celles qui doivent jouer le rôle, les unes de variables indépendantes, les autres de fonctions des premières. Ce choix n'est pas sans influence sur la simplicité, sur la netteté des résultats à atteindre, et quelquefois on a intérêt à le modifier dans le cours de calculs déjà commencés. Souvent même, pour en reculer les limites, on adjoint artificiellement, par des relations convenables, d'autres quantités à celles qui se présentent naturellement dans la question. *Il est donc utile de pouvoir, sans recommencer le raisonnement et les calculs déjà faits, tirer mécaniquement en quelque sorte les formules relatives à un nouveau choix de variables et de fonctions, de celles auxquelles le choix fait primitivement avait déjà conduit.* C'est en cela que consiste le *changement des variables,* opération comprenant par exemple ce que l'on nomme en Géométrie la transformation des coordonnées en d'autres de même genre ou de genre différent.

Les relations existant entre les quantités de la question peuvent être supposées toutes finies (**281**), car le cas contraire se ramènerait théoriquement à celui-ci, par l'intégration préalable du

système de ces relations, si elles comprenaient des équations différentielles. Le problème dont nous nous occupons se rattache ainsi à la théorie des fonctions implicites et, faute d'occasion meilleure, nous le traitons ici, bien qu'aucun principe général important ne s'y trouve engagé.

325. Habituellement les formules à transformer renferment les variables et les fonctions primitives avec des dérivées de celles-ci. La substitution aux premières, de leurs expressions au moyen des variables et des fonctions nouvelles, fournies par la simple résolution des équations données entre les unes et les autres, chasse immédiatement des formules en question les variables et les fonctions primitives. (C'est à cette simple opération que se réduit par exemple la transformation des coordonnées de la Géométrie analytique élémentaire.) Il ne reste donc à opérer que l'élimination des dérivées des fonctions primitives pouvant figurer dans les mêmes formules, et, par suite, qu'à chercher de même leurs expressions au moyen des quantités nouvelles. L'énoncé suivant embrasse la plupart des formes sous lesquelles le problème peut se présenter.

On a g fonctions de h variables

$$(1) \quad u_1 = f_1(x, y, \ldots), \qquad u_2 = \ldots, \qquad \ldots, \qquad u_g = f_g(x, y, \ldots),$$

et de plus $g+h$ équations données entre toutes ces quantités variables et $g+h$ autres $X, Y, \ldots, U_1, U_2, \ldots, U_g$

$$(2) \left\{ \begin{array}{l} \varphi_1(x, y, \ldots, u_1, u_2, \ldots, u_g, X, Y, \ldots, U_1, U_2, \ldots, U_g) = 0, \\ \varphi_2(x, y, \ldots, u_1, u_2, \ldots, u_g, X, Y, \ldots, U_1, U_2, \ldots, U_g) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_{g+h}(x, y, \ldots, u_1, u_2, \ldots, u_g, X, Y, \ldots, U_1, U_2, \ldots, U_g) = 0. \end{array} \right.$$

En vertu des équations (1), (2), $X, Y, \ldots$ *peuvent être considérées comme des variables indépendantes et* $U_1, U_2, \ldots, U_g$ *comme des fonctions de ces dernières. Cela posé, on demande l'expression des dérivées des anciennes fonctions* $u_1, \ldots, u_g$, *par rapport à* $x, y, \ldots$, *au moyen des nouvelles variables* $X, Y, \ldots$ *des nouvelles fonctions* $U_1, \ldots, U_g$ *et de leurs dérivées (par rapport à* $X, Y, \ldots$ *naturellement).*

Des équations simultanées (1), (2), en nombre total $2g+h$, on peut tirer les quantités $u_1, \ldots u_g, U_1, \ldots U_g, x, y, \ldots$ en même nombre, en fonctions de $X, Y, \ldots$, et, parmi les formules auxquelles conduit cette résolution, nous retiendrons seulement celles qui fournissent les expressions de $U_1, \ldots, U_g$ et que nous écrirons

$$(3)\qquad F_1(X, Y, \ldots) - U_1 = 0, \qquad \ldots, \qquad F_g(X, Y, \ldots) - U_g = 0.$$

Inversement on peut, en vertu des équations (2), (3), considérer $u_1, \ldots, u_g, U_1, \ldots, U_g, X, Y, \ldots$ comme des fonctions implicites de $x, y, \ldots$, par suite former les expressions de leurs dérivées de tous ordres dont nous avons parlé au n° 311. Ces expressions sont rationnelles par rapport aux dérivées partielles (d'ordres égaux ou moindres) des premiers membres des équations (2), (3) qu'on a ainsi résolues, *en particulier des dérivées de* $F_1(X, Y, \ldots), \ldots, F_g(X, Y, \ldots)$, *c'est-à-dire de celles des nouvelles fonctions mêmes*. Si donc on prend celles de ces expressions qui se rapportent aux dérivées de $u_1, \ldots, u_g$ (par rapport à $x, y, \ldots$) et qu'on y remplace $x, y, \ldots, u_1, \ldots, u_g$ par leurs valeurs en $X, Y, \ldots, U_1, \ldots, U_g$ tirées des équations (2), *on trouvera pour les dérivées des anciennes fonctions, des expressions différentielles ne renfermant plus que les quantités nouvelles, variables, fonctions et dérivées*. C'est précisément ce que nous cherchions.

Les formules ainsi obtenues contiennent, comme nous l'avons dit, les dérivées de $F_1, \ldots, F_g$: ce sont précisément celles des nouvelles fonctions par rapport aux nouvelles variables

$$(4)\qquad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{dU_1}{dX}, \quad \dfrac{dU_1}{dY}, \quad \ldots; \quad \dfrac{d^2U_1}{dX^2}, \quad \dfrac{d^2U_1}{dX\,dY}, \quad \dfrac{d^2U_1}{dY^2}, \quad \ldots; \quad \ldots \\ \dfrac{dU_2}{dX}, \quad \dfrac{dU_2}{dY}, \quad \ldots; \quad \dfrac{d^2U_2}{dX^2}, \quad \dfrac{d^2U_2}{dX\,dY}, \quad \dfrac{d^2U_2}{dY^2}, \quad \ldots; \quad \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

combinées suivant des règles déterminées avec les dérivées partielles des premiers membres des *équations de transformation* (2); *l'aspect extérieur de ces formules dépend donc exclusivement des équations de transformation et nullement de la nature des fonctions* (1) *sur lesquelles on veut exécuter le changement des variables*. Elles ont ainsi, relativement à une trans-

formation donnée, une individualité constante, grâce à laquelle il suffit de les avoir construites une seule fois pour pouvoir exécuter cette transformation sur des fonctions données quelconques. C'est ainsi, par exemple, qu'une transformation donnée de coordonnées s'exécute au moyen de formules qui sont applicables à toutes les courbes.

326. La règle générale à suivre pour exécuter un changement de variables se formule donc dans les termes suivants : *Tirer les dérivées des anciennes fonctions par rapport aux anciennes variables, des équations* (2), (3) *différentiées convenablement par rapport à ces dernières; chasser des expressions obtenues les anciennes quantités exprimées en fonctions des nouvelles par la résolution des équations de transformation, et y remplacer par les notations* (4) *celles des dérivées partielles de* $F_1, \ldots, F_g$.

La nature spéciale des formules à transformer se prête quelquefois à des artifices qui abrègent beaucoup ces calculs, ordinairement fort laborieux; mais les incidents de ce genre ne peuvent être traités utilement qu'avec les questions particulières où ils surviennent.

327. Le retour inverse des nouvelles quantités aux anciennes s'opère évidemment en permutant dans l'énoncé ci-dessus ces deux sortes de quantités, et en y substituant les équations (1) aux équations (3).

328. Voici les principaux cas à remarquer :

I. *On ne change que les variables indépendantes.*

Des équations de transformation (2), g deviennent alors

$$U_1 = u_1, \qquad U_2 = u_2, \qquad \ldots, \qquad U_g = u_g,$$

moyennant quoi on peut supposer tout leur système réduit à celui des h autres ne contenant plus $U_1, U_2, \ldots, U_g$, et les équations (3) contenir $u_1, u_2, \ldots, u_g$ à leur place. La marche des calculs est la même, mais ils se simplifient beaucoup parce que les seules déri-

vées parasites introduites par la différentiation sont celles de X, Y, ... par rapport à $x, y, \ldots$.

II. *Les fonctions n'étant pas changées comme ci-dessus ne figurent pas en outre dans les équations de transformation.*

Il est clair alors que l'opération s'exécute séparément pour chacune des fonctions à transformer, c'est-à-dire que le système des équations (1), (2), (3) se décompose en g autres de la forme

$$(5) \qquad u = f(x, y, \ldots),$$

$$(6) \qquad \begin{cases} \varphi_1(x, y, \ldots, X, Y, \ldots) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_h(x, y, \ldots, X, Y, \ldots) = 0, \end{cases}$$

$$(7) \qquad F(X, Y, \ldots) - u = 0.$$

Le groupe (6) différentié fournit à lui seul les expressions des dérivées parasites de X, Y, ..., par rapport à $x, y, \ldots$, qu'il suffit de leur substituer dans l'équation (7) différentiée aussi. Dans ce cas, les nouvelles dérivées entrent d'une manière linéaire et homogène dans les expressions cherchées des anciennes.

Si les équations de transformation étaient données toutes résolues par rapport à X, Y, ..., on retomberait sur la différentiation d'une fonction composée.

Quand elles sont données résolues par rapport aux anciennes variables $x, y, \ldots$, les formules pour un ordre quelconque de dérivées anciennes peuvent se construire par la répétition du mécanisme alors très simple qui les a fournies pour le premier ordre. Il est effectivement permis de considérer les dérivées de u d'un ordre quelconque comme les dérivées premières des dérivées antérieures, par suite d'exécuter sur celles-ci, traitées comme fonctions principales, les mêmes opérations (différentiations, élimination immédiate de $x, y, \ldots$) qui avaient fourni les expressions des dérivées premières $\frac{du}{dx}, \frac{du}{dy}, \ldots$. Car, u n'entrant pas dans les équations (6), ses dérivées ne peuvent non plus jamais s'y introduire, en sorte que, pour chaque dérivée devenue fonction principale, les équations de transformation restent absolument ce qu'elles étaient pour la fonction primitive u.

III. *Si l'on ne change que les fonctions, les variables indépendantes restant les mêmes,* on peut supposer, à cause de $x = X$, $y = Y$, ..., que les équations (2) se réduisent à g seulement ne contenant pas X, Y, ..., et faire complètement abstraction des équations (3). La simple différentiation des équations de transformation en donne d'autres dont la résolution fournit immédiatement les expressions des anciennes dérivées, d'où il ne reste plus qu'à chasser $u_1, u_2, \ldots, u_g$.

329. L'*inversion* des fonctions est un changement de variables que l'on fait à chaque instant dans la monographie des fonctions. Il consiste, dans un groupe donné de fonctions en nombre égal à celui de leurs variables indépendantes, à prendre ces dernières pour nouvelles fonctions et les anciennes fonctions pour nouvelles variables.

Dans le cas d'une seule fonction, les équations (1) se réduisent à

$$(8) \qquad u = f(x),$$

les équations de transformation (2) à

$$\begin{cases} x - U = 0, \\ u - X = 0, \end{cases}$$

et les équations (3) à

$$U = \psi(X),$$

ψ désignant la fonction inverse. Mais il vaut mieux déduire les formules cherchées de celles du n° 332 (*inf.*), en prenant $\varphi(t) = \psi(t)$. d'où $F(t) = t$ et, par suite,

$$\frac{du}{dt} = 1, \qquad \frac{d^2u}{dt^2} = \frac{d^3u}{dt^3} = \ldots = 0.$$

Si l'on remplace ensuite la lettre t par la lettre u pour ne pas multiplier les notations, il vient

$$\frac{du}{dx} = 1 : \frac{dx}{du}, \qquad \frac{d^2u}{dx^2} = -\frac{d^2x}{du^2} : \left(\frac{dx}{du}\right)^3, \qquad \ldots.$$

On peut encore se contenter de différentier indéfiniment l'équation (8) par rapport à u, en y traitant u comme une variable indépendante, x comme une fonction de u, et de résoudre successive-

ment les équations ainsi obtenues par rapport à $f'(x)=\frac{du}{dx}$, $f''(x)=\frac{d^2u}{dx^2}$, ...

330. Dans le premier ordre et en ayant égard au théorème du n° **306** *bis*, cette dernière méthode appliquée à l'inversion simultanée de g fonctions $u_1, u_2, \ldots, u_g$ de g variables indépendantes $x, y, \ldots$ conduit facilement à cette proposition :

Pour des valeurs correspondantes de toutes ces quantités, le déterminant différentiel des premières par rapport aux dernières est l'inverse arithmétique de celui des dernières par rapport aux premières.

331. Quand les équations de transformation (2) ne sont pas toutes finies, le changement de variables ne peut être exécuté dans toute sa généralité avant leur intégration. On conçoit cependant qu'elles permettent immédiatement certaines transformations particulières, par exemple celle de formules contenant seulement, en fait d'anciennes quantités, des dérivées dont ces équations fourniraient les nouvelles expressions, par elles-mêmes ou par les équations que l'on peut obtenir en les différentiant.

332. Pour montrer une application de la remarque finale de l'alinéa II du n° **328**, nous traiterons la question particulière suivante qui d'ailleurs se pose assez souvent :

Une fonction u de x devient une fonction de t quand on y substitue à x une fonction donnée de t, $\varphi(t)$; exprimer les dérivées de u par rapport à x, au moyen de celles de u et de x par rapport à t.

Ici les équations (1) se réduisent à

$$u=f(x),$$

les équations de transformation à

$$x=\varphi(t)$$

et les équations (3) à

$$u=F(t).$$

La différentiation des deux dernières par rapport à l'ancienne variable x donne

$$1 = \varphi'(t)\frac{dt}{dx}, \qquad \frac{du}{dx} = F'(t)\frac{dt}{dx} = \frac{du}{dt}\frac{dt}{dx},$$

système dont la résolution par rapport à $\frac{du}{dx}$ donne

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dt} : \varphi'(t) = \frac{du}{dt} : \frac{dx}{dt}.$$

Ainsi l'expression de l'ancienne dérivée première s'obtient en divisant la nouvelle par $\varphi'(t)$, règle dont l'application répétée fournira successivement celle des anciennes dérivées de tous ordres, puisque l'équation de transformation ne contient pas u. On trouve ainsi

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left[\frac{du}{dt} : \frac{dx}{dt}\right] : \frac{du}{dt} = \left(\frac{d^2u}{dt^2}\frac{dx}{dt} - \frac{d^2x}{dt^2}\frac{du}{dt}\right) : \left(\frac{dx}{dt}\right)^2,$$

$$\frac{d^3u}{dx^3} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

333. Le changement des variables principales dans les intégrales indéfinies ou définies (Chap. VIII) est une opération très fréquente, et la proposition particulière suivante est une des règles les plus utiles de leur calcul.

Si par la substitution

(9) $$x = \varphi(t),$$

on change la fonction de x

(10) $$F(x) = \int f(x)\,dx$$

en la fonction $F[\varphi(t)]$ *de la nouvelle variable* t*, on aura la relation*

(11) $$F[\varphi(t)] = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt.$$

Effectivement les dérivées des deux membres par rapport à t sont identiques, puisque celle du premier calculée par la règle de

différentiation des fonctions composées est

$$F'[\varphi(t)]\varphi'(t) = f[\varphi(t)]\varphi'(t)$$

à cause de $F'(x) = f(x)$, et que celle du second est par définition l'expression même placée sous le signe d'intégration. La formule (11) se déduit ainsi de la relation (10) par un mécanisme consistant à changer simplement dans celle-ci, x en $\varphi(t)$ et dx en $d\varphi(t) = \varphi'(t)\,dt$.

Elle permet de transformer les intégrales indéfinies de mille manières. Elle sert même à en calculer effectivement un certain nombre; car il est possible qu'on n'aperçoive pas la fonction de x qui a $f(x)$ pour dérivée, mais que l'on puisse trouver bien plus facilement pour $\varphi(t)$ une fonction qui rende $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$ dérivée par rapport à t d'une fonction connue $\Phi(t)$.

Pour avoir $F(x)$, il ne reste plus alors qu'à remplacer inversement t dans $\Phi(t)$ par la fonction implicite de x que fournit la résolution de l'équation (9) par rapport à t. C'est ce qu'on nomme l'*intégration par substitution*.

334. Si, après avoir particularisé les seconds membres des relations (10), (11), de manière que la dernière ait lieu quelle que soit t, on trace dans le plan servant à la notation graphique de cette nouvelle variable un chemin $[t_0 T]$ tel qu'en y marchant $x = \varphi(t)$ décrive le chemin d'intégration $[x_0 X]$ (**228**), le calcul des deux membres de cette relation, fait sur le nouveau chemin, donnera

$$F(X) - F(x_0) = \int_{t_0}^{T} f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt,$$

c'est-à-dire

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = \int_{t_0}^{T} f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt, \tag{12}$$

la première intégrale étant prise, bien entendu, sur le chemin $[x_0 X]$ et la seconde sur le chemin $[t_0 T]$.



CHAPITRE XII.

PRINCIPE ESSENTIEL DE LA THÉORIE DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES PARTIELLES.

Généralités.

335. Comme nous l'avons dit au n° **286**, un système d'équations différentielles est *immédiat,* quand toutes ses équations sont du premier ordre (**281**) et fournissent immédiatement plus ou moins de dérivées des fonctions inconnues, exprimées en fonctions composées des variables indépendantes, de ces fonctions inconnues elle-mêmes et de leurs autres dérivées.

Quand ce sont *toutes* les dérivées des fonctions inconnues, dont les équations données fournissent de pareilles expressions, aucune dérivée ne peut figurer dans leurs seconds membres, qui ainsi sont essentiellement finis, et le système est de la nature de ceux dont nous avons commencé la théorie dans le Chapitre X.

Quand au contraire c'est *une partie* seulement de ces dérivées qui constituent les premiers membres des équations données, les autres dérivées peuvent, en totalité ou en partie seulement, entrer dans les seconds membres qui ainsi sont éventuellement différentiels; et, au lieu d'un système d'équations différentielles totales, on a ce que nous appellerons un *système d'équations différentielles partielles*. Ces systèmes sont ceux dont nous allons nous occuper, en complétant la définition de leur caractère *immédiat* par une restriction essentielle que nous spécifierons au moment voulu (**341**, **342**, *inf.*).

Pour disposer nettement les équations d'un pareil système, il faut les écrire dans les cases d'un quadrillage rectangulaire dont les lignes correspondent aux variables indépendantes, les colonnes aux fonctions inconnues, en plaçant l'équation qui a par

exemple $\frac{ds}{dt}$ pour premier membre dans la case qui appartient à la fois à la ligne (t) et à la colonne (s). Des cases en nombre et en positions arbitraires peuvent évidemment rester inoccupées dans ce tableau.

336. Dans un système d'équations différentielles partielles il y a, relativement à chaque fonction inconnue, une distinction essentielle à faire entre les diverses variables indépendantes (*cf.* 217).

Nous appellerons variables *principales* d'une fonction inconnue déterminée celles par rapport auxquelles sont prises les dérivées de cette fonction qui constituent les premiers membres des équations de la colonne correspondante dans le tableau du système. Pour la même fonction, toutes les autres variables seront *paramétriques*. Par exemple, si les variables indépendantes sont x, y, z, t seulement, et si la colonne (w) ne contient que les deux équations

		(w)	
(x)	...	$\frac{dw}{dx} = \dots$	...
(y)	...		...
(z)	...	$\frac{dw}{dz} = \dots$	...
(t)	...		...

la fonction inconnue w aura x, z pour variables principales, y, t pour variables paramétriques.

Le partage dont il s'agit ne s'effectue pas nécessairement de la même manière pour toutes les fonctions inconnues, telle variable pouvant fort bien être à la fois principale pour une de ces fonctions et paramétrique pour une autre.

337. Cette distinction entre les variables en entraîne une non

moins importante entre les diverses dérivées d'un même ordre quelconque k, d'une fonction inconnue déterminée. Nous appellerons *genre* de l'une de ces dérivées le nombre total de ses différentiations génératrices (distinctes ou non) qui doivent être effectuées par rapport à des variables principales.

D'après cela, l'ordre k des dérivées de la fonction dont il s'agit contient : 1° le seul genre 0, si toutes les variables sont paramétriques pour cette fonction; 2° les $k+1$ genres

$$0, \quad 1, \quad 2, \quad \ldots, \quad k,$$

si les variables sont les unes paramétriques et les autres principales; 3° le seul genre k, si toutes les variables sont principales.

Dans un ordre quelconque, nous appellerons aussi *paramétriques* les dérivées de genre 0, et *principales* toutes celles de genres > 0.

Dans l'exemple ci-dessus (336), la fonction inconnue w a dans le premier ordre : les dérivées de genre 0 ou paramétriques

$$\frac{dw}{dy}, \quad \frac{dw}{dt},$$

et les dérivées principales de genre 1

$$\frac{dw}{dx}, \quad \frac{dw}{dz}.$$

Dans le second ordre elle a : les dérivées de genre 0 ou paramétriques

$$\frac{d^2 w}{dy^2}, \quad \frac{d^2 w}{dy\,dt}, \quad \frac{d^2 w}{dt^2},$$

et en fait de dérivées principales : celles de genre 1

$$\frac{d^2 w}{dx\,dy}, \quad \frac{d^2 w}{dx\,dt}, \quad \frac{d^2 w}{dz\,dy}, \quad \frac{d^2 w}{dz\,dt}$$

et celles de genre 2

$$\frac{d^2 w}{dx^2}, \quad \frac{d^2 w}{dx\,dz}, \quad \frac{d^2 w}{dz^2};$$

et ainsi de suite.

338. D'après cette définition, *les équations différentielles*

d'un système immédiat partiel expriment toutes les dérivées principales premières des fonctions inconnues, en fonctions composées des variables indépendantes, de ces mêmes fonctions inconnues et de tout ou partie de leurs dérivées paramétriques premières.

339. La distinction entre les intégrales d'un système immédiat d'équations différentielles partielles s'opère suivant les mêmes règles et a les mêmes conséquences que pour les équations différentielles totales (**288**).

Les intégrales *ordinaires* sont celles dont les valeurs, à elles-mêmes et ici à leurs dérivées paramétriques premières, associées aux valeurs correspondantes des variables, tombent toujours dans des aires où les composantes des seconds membres des équations du système sont toutes olotropes.

Pour les intégrales *singulières* au contraire, les valeurs dont il s'agit sont toujours singulières pour quelqu'une au moins de ces composantes.

Par exemple, l'intégrale $u(x, y, z)$ du système

$$(1) \qquad \left|\begin{array}{l} \dfrac{du}{dx} = \mathrm{U}_x\left(x, y, z, u, \dfrac{du}{dz}\right) \\ \hline \dfrac{du}{dy} = \mathrm{U}_y\left(x, y, z, u, \dfrac{du}{dz}\right) \\ \hline \\ \end{array}\right|$$

est ordinaire, si quelles que soient x, y, z, du moins entre certaines limites, les fonctions de cinq variables indépendantes

$$\mathrm{U}_x(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5), \quad \mathrm{U}_y(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5)$$

sont l'une et l'autre toujours olotropes pour

$$t_1 = x, \qquad t_2 = y, \qquad t_3 = z, \qquad t_4 = u(x, y, z), \qquad t_5 = u'_z(x, y, z).$$

Elle est singulière, si l'une de ces fonctions ou toutes deux

ne sont jamais olotropes pour les valeurs de $t_1, \ldots, t_5$ ci-dessus définies.

Les intégrales ordinaires peuvent seules faire l'objet d'une théorie générale; c'est d'elles que nous allons nous occuper exclusivement, en réservant pour le n° 379 (*inf.*) le peu de mots que nous avons à dire sur les autres.

340. La substitution d'intégrales ordinaires connues dans les équations d'un système immédiat partiel en transforme tous les seconds membres en des fonctions composées, habituellement différentielles, à composantes essentiellement olotropes, des variables, des intégrales et de leurs dérivées paramétriques premières.

Les règles générales établies pour les fonctions composées (253 *et suiv.*) sont donc applicables à ces seconds membres; et, comme nous l'avons fait au n° 289 pour les équations différentielles totales, *on peut différentier indéfiniment celles du système partiel considéré.*

Les nouvelles équations ainsi obtenues, jointes à celles du système, fournissent certaines expressions *de toutes les dérivées principales des intégrales,* car des différentiations convenables peuvent évidemment en faire naître une quelconque au premier membre; *mais elles n'en fournissent jamais pour leurs dérivées paramétriques,* parce que des différentiations, quelles qu'elles soient, ne peuvent jamais diminuer le genre commun 1 des dérivées (principales premières) qui forment les premiers membres des équations différentielles proposées.

Si donc on veut employer toutes ces équations à la reconstruction des développements des intégrales ordinaires considérées, *il faut de toute nécessité connaître, non seulement les valeurs initiales de ces fonctions, mais celles aussi de toutes leurs dérivées paramétriques. Il faut encore que ces équations puissent être rangées dans un ordre de succession tel, que la résolution de chacune puisse se faire isolément, sans exiger autre chose que la connaissance des valeurs initiales de toutes les dérivées paramétriques, jointe à celle des résultats fournis par la résolution des équations antérieures.*

Ces deux conditions sont également nécessaires au succès de

l'opération consistant à déduire toutes les intégrales ordinaires du système considéré, de semblables développements construits sur des valeurs initiales choisies arbitrairement pour elles et leurs dérivées paramétriques.

341. Dans la théorie des équations différentielles totales, nous n'avons pas eu à nous préoccuper de la seconde condition, parce que la succession voulue s'est trouvée réalisée d'elle-même en prenant ce que nous avons appelé les formules primitives, par ordres croissants des dérivées figurant dans leurs premiers membres; mais ici les choses se passent d'une manière infiniment moins simple, parce que la présence des dérivées paramétriques dans les seconds membres des équations du système immédiat partiel considéré rend généralement l'ordre du second membre égal à celui du premier dans les relations qui remplacent les formules primitives. Et il arrive effectivement que cette seconde condition n'est pas remplie pour certains systèmes de la nature de ceux dont la définition a été ébauchée aux n°s 286, 335.

Nous les excluons absolument de nos raisonnements, et nous réserverons désormais le nom de systèmes *immédiats* à ceux qui satisfont à la condition générale dont il s'agit, et qui seuls peuvent donner lieu au théorème fondamental du n° 344 (*inf.*).

342. La restriction à ajouter à la définition des numéros cités pour qu'elle devienne celle d'un système immédiat dans le sens ci-dessus expliqué consiste à exclure certaines dérivées paramétriques de divers seconds membres des équations différentielles. Nous ne sommes pas en mesure de la formuler d'une manière générale et précise; mais il nous suffira, et au delà, de considérer les systèmes satisfaisant à la condition que :

En appelant u, v deux fonctions inconnues quelconques, aucune dérivée (paramétrique) de v ne figure dans les seconds membres des équations de la colonne (u) si quelque variable paramétrique de u est principale pour v.

Tous ces systèmes sont immédiats, comme nous le constaterons au n° 344, et, pour plus de simplicité dans le langage, *ce sont eux seuls que dorénavant nous qualifierons de la sorte.*

343. Éclaircissons ce qui précède par quelques exemples.

Le système

(2)	$\frac{du}{dx} = \mathrm{U}_x\left(x, y, u, v, \frac{du}{dy}, \frac{dv}{dx}\right)$	
		$\frac{dv}{dy} = \mathrm{V}_y\left(x, y, u, v, \frac{du}{dy}, \frac{dv}{dx}\right)$

n'est pas de ceux que maintenant nous nommons immédiats, parce que $\frac{dv}{dx}$ en particulier figure dans le second membre de l'équation de la colonne (u), bien que la variable y qui est paramétrique pour u soit principale pour v.

Au contraire le système

(2 *bis*)	$\frac{du}{dx} = \mathrm{U}_x\left(x, y, u, v, \frac{du}{dy}\right)$	
		$\frac{dv}{dy} = \mathrm{V}_y\left(x, y, u, v, \frac{dv}{dx}\right)$

rentre dans leur classe, nonobstant la similitude complète de ce Tableau et du précédent, parce que $\frac{dv}{dx}$, $\frac{du}{dy}$ ont disparu respectivement des seconds membres de la première colonne et de la seconde.

De même, plus généralement, *toutes les fois que dans les équations de chaque colonne ne figurent jamais les dérivées (paramétriques) des fonctions inconnues correspondant aux autres colonnes.*

Tel est encore le système

(3)	$\frac{du}{dx} = \mathrm{U}_x\left(x, y, u, v, \frac{du}{dy}, \frac{dv}{dy}\right)$	$\frac{dv}{dx} = \mathrm{V}_x\left(x, y, u, v, \frac{du}{dy}, \frac{dv}{dy}\right)$

malgré la présence de toutes les dérivées paramétriques dans les seconds membres. De même, plus généralement, *pour tout système dans lequel le partage des variables (en principales et paramétriques) s'opère de la même manière relativement à toutes les fonctions inconnues.*

C'est dans cette dernière catégorie que se rangent les équations dites *aux dérivées partielles* soit isolées, soit simultanées. Le Tableau contient alors soit une, soit plusieurs colonnes dans lesquelles toutes les cases d'une même ligne sont seules occupées.

On doit y comprendre également *les équations différentielles égalant à des fonctions données des seules variables indépendantes, les dérivées de l'intégrale indéfinie d'une différentielle première incomplète prises par rapport aux variables principales* (217). C'est évidemment le cas particulier le plus simple du problème général qui nous occupe; il est caractérisé par ces deux circonstances : qu'il y a une seule fonction inconnue à découvrir, et que ni celle-ci ni aucune de ses dérivées (paramétriques) ne viennent compliquer les seconds membres.

A la rigueur *on peut encore y placer les systèmes d'équations différentielles totales,* puisque, pour toutes les fonctions inconnues, les variables sont principales, partant de même nom. La distinction que nous maintenons cependant entre eux et ceux d'équations différentielles partielles est justifiée par bien des dissemblances, en particulier par l'étendue infiniment plus considérable des éléments d'indétermination que comportent les intégrales de ces derniers. Il s'en faut d'ailleurs que la théorie de ceux-ci, dont nous ne pouvons donner qu'une ébauche bien grossière, soit aussi avancée que celle des autres. Néanmoins les dissemblances auxquelles nous faisons allusion laissent subsister des analogies qui nous permettent de glisser légèrement sur divers détails.

344. Approfondissons maintenant la question effleurée au n° 340. On a d'abord ce théorème :

Une dérivée principale d'ordre k et de genre $\varkappa$ quelconques, de toute intégrale ordinaire d'un système immédiat satisfaisant à la condition restrictive du n° 342 peut, au moyen de

quelque équation de ce système convenablement différentiée, être exprimée en fonction composée différentielle contenant, avec les variables indépendantes, les diverses intégrales faisant partie du même groupe, leurs dérivées de toutes sortes d'ordres $< k$ *et leurs dérivées d'ordre* k, *mais de genres* $< \varkappa$.

Supposons, pour fixer les idées, que la dérivée principale dont il s'agit appartienne à l'intégrale u et comporte dans sa formation une différentiation au moins par rapport à la variable x supposée principale pour u; représentons par la caractéristique D^{k-1}, ce qui reste de l'ensemble de ses k différentiations génératrices quand on en supprime une intéressant x, en sorte que cette dérivée puisse se noter par $D^{k-1}\frac{du}{dx}$.

Puisque la variable x est principale pour l'intégrale u, le système considéré contient forcément l'équation

$$(4)\qquad \frac{du}{dx} = U_x(x, y, \ldots, u, v, \ldots, \Delta w, \ldots),$$

où Δw représente quelqu'une des dérivées paramétriques premières contenues dans son second membre, et dont la différentiation notée par D^{k-1} donnera

$$D^{k-1}\frac{du}{dx} = D^{k-1}U_x(x, y, \ldots, u, v, \ldots, \Delta w, \ldots).$$

Le premier membre de cette nouvelle équation est précisément la dérivée $k^{\text{ième}}$ de u dont nous nous occupons, et l'expression qu'en fournit le développement du second membre contient, outre ce qui y figurait avant la différentiation :

1° A cause de la présence de $u, v, \ldots$, des dérivées de toutes ces intégrales d'ordres $< k$ dont notre énoncé autorise la présence;

2° A cause de celle des dérivées premières $\ldots, \Delta w, \ldots$, encore des dérivées d'ordres $< k$ des intégrales $\ldots, w, \ldots$ et avec elles des dérivées $k^{\text{ièmes}}$, mais des formes $\ldots, D^{k-1}\Delta w, \ldots$.

Cela posé, la présence de Δw dans le second membre de l'équation (4) exige, à cause de la restriction du n° **342**, que toute variable qui est paramétrique pour u le soit aussi pour w et, par suite, qu'une différentiation donnée d'ordre quelconque ne soit

pas pour w d'un genre supérieur à celui qu'elle offre pour u. La différentiation D^{k-1}, qui est évidemment de genre $\varkappa - 1$ pour u, est ainsi d'un genre égal ou moindre pour w. La dérivée $D^{k-1}\Delta w$ est donc de genre $\varkappa - 1$ au plus, parce que Δ est toujours pour w une différentiation paramétrique; c'est ce qu'il restait à prouver.

345. Comme pour les équations différentielles totales (**289**), nous appellerons *primitives*, tant les formules auxquelles conduit ainsi la différentiation indéfinie des équations du système partiel considéré, que les expressions qu'elles fournissent pour toutes les dérivées principales de ses intégrales ordinaires.

Il convient de concevoir ces diverses formules groupées par ordres croissants des dérivées principales qu'elles intéressent, et celles d'un même ordre, sous-groupées par genres croissants des mêmes dérivées.

346. En appelant toujours *simples* les dérivées principales provenant de différentiations dont les *principales* intéressent toutes *une seule* variable, et *complexes* celles dont les différentiations génératrices intéressent au contraire *plusieurs* variables principales distinctes, on apercevra facilement, comme au n° **289**, V, pour les équations différentielles totales, qu'*une dérivée simple a une seule expression primitive, tandis qu'une dérivée complexe en a plusieurs, savoir autant que ses différentiations génératrices intéressent de variables principales distinctes.*

347. *Chacune des dérivées principales mentionnées au n°* **344** *est aussi exprimable par une fonction composée différentielle contenant encore les variables indépendantes et les intégrales, mais, avec elles, leurs dérivées exclusivement paramétriques* (*d'ordres égaux ou moindres*).

Les équations elles-mêmes du système immédiat considéré fournissent des expressions de cette nature pour les dérivées principales premières.

Considérons maintenant dans le second ordre les expressions primitives des dérivées principales de genre 1. En vertu du théorème précédent, elles ne contiennent en fait de dérivées principales que celles d'ordre 1; elles prendront donc la forme voulue

par la substitution à ces dernières de leurs expressions dont nous venons de parler. Celles des dérivées de genre 2 contiennent en outre des dérivées de genre 1; elles prendront donc encore la forme voulue par la même substitution accompagnée de celle faite aux dérivées du premier genre, de leurs expressions débarrassées de toute dérivée principale qu'on vient d'obtenir.

En procédant de même dans le troisième ordre pour les dérivées principales de genres 1, 2, 3 successivement, on arrivera au résultat voulu, parce que dans chaque genre les expressions primitives ne contiennent jamais en fait de dérivées principales que celles d'ordres moindres ou de même ordre, mais alors de genres moindres, dont les opérations antérieures ont précisément fourni des expressions débarrassées de toute dérivée principale.

Et ainsi de suite pour les ordres 4, 5, ...

Nous appellerons encore *ultimes* (*cf.* **290**) les formules ainsi obtenues et les expressions au moyen seulement des variables indépendantes, des intégrales et de leurs dérivées paramétriques d'ordres égaux ou moindres, qu'elles fournissent pour toutes les dérivées principales des intégrales du groupe ordinaire que le système proposé est supposé posséder.

Comme au n° **290**, V, pour les équations différentielles totales, *le passage des relations primitives aux relations ultimes est encore ici une opération réversible.*

C'est la restriction du n° **342**, il importe de le remarquer, qui nous a permis de déduire les formules ultimes, des formules primitives résolues successivement par ordres et genres croissants. Dans certains autres cas sur lesquels il est inutile de nous appesantir, d'autres arrangements de ces dernières formules rendent encore possible leur résolution successive. Mais il y a des systèmes où nul arrangement de cette espèce n'est possible.

Tel est, par exemple, le système (2) du n° **343**, pour lequel, et dès le second ordre, les dérivées $\frac{d^2 u}{dx\,dy}$, $\frac{d^2 v}{dx\,dy}$, toutes deux de même genre 1, ont des expressions primitives dont chacune est embarrassée de l'autre dérivée.

348. Comme nous l'avons remarqué pour les équations différentielles totales (**290**, III), la multiplicité des expressions d'une

même dérivée complexe s'accroît dans le passage des formules primitives aux formules ultimes, en raison de celle des dérivées complexes dont cette opération comporte l'élimination. Mais, pour un système immédiat partiel, *cette multiplicité peut s'étendre même aux dérivées simples*, parce que leurs expressions primitives peuvent fort bien renfermer des dérivées complexes d'autres fonctions inconnues, et par suite être transformées de plusieurs manières par leur élimination.

On notera cependant que dans le second ordre (le moindre où il puisse exister des dérivées complexes), une dérivée simple ne peut avoir qu'une expression ultime, parce qu'il n'y a jamais à éliminer de son expression primitive que des dérivées de genre 1, partant simples. Une dérivée complexe seconde n'en a que deux pour la même raison, et parce qu'elle n'a que deux expressions primitives.

349. Les formules ultimes résultent de certaines combinaisons des formules primitives, choisies de manière à faire disparaître de leurs seconds membres toutes les dérivées principales. D'autres combinaisons consistant par exemple à éliminer seulement une partie des dérivées principales, ou bien encore à différentier les formules résultant de ces combinaisons et à y exécuter encore des éliminations partielles ou totales des dérivées principales qui s'y sont réintroduites, fourniront pour les dérivées principales une infinité d'autres expressions en quelque sorte intermédiaires entre les primitives et les ultimes, et *toutes, comme elles, entières par rapport aux dérivées partielles des seconds membres des équations du système immédiat considéré, et aussi par rapport aux dérivées des intégrales y entrant en dehors de ces dérivées partielles*.

De ces formules intermédiaires on pourra déduire de nouveau et d'une infinité de manières des formules débarrassées de toute dérivée principale dans leurs seconds membres. Mais ce sont des considérations sur lesquelles nous pouvons nous dispenser de nous appesantir.

350. *A partir de valeurs initiales données des variables, x_0, y_0, z_0, ..., les développements par la série de Taylor des inté-*

grales ordinaires, dont on admet l'existence pour le système immédiat considéré, peuvent être reconstruits, dès que l'on connaît seulement leurs valeurs initiales et celles de leurs dérivées paramétriques de tous ordres.

L'hypothèse numérique

$$x = x_0, \quad y = y_0, \quad z = z_0, \quad \ldots$$

transforme effectivement tous les seconds membres des formules ultimes (347) en des quantités connues, puisqu'ils deviennent ainsi des fonctions connues des valeurs initiales tant des variables indépendantes, que des intégrales et de leurs dérivées paramétriques, lesquelles sont supposées connues. Ces formules feront donc connaître les valeurs initiales de leurs premiers membres, c'est-à-dire de toutes les dérivées principales des intégrales dont il s'agit.

En résumé, on connaît donc ainsi les valeurs initiales de ces intégrales et de toutes leurs dérivées sans distinction, c'est-à-dire ce qui est nécessaire pour écrire les développements cherchés.

351. Quand les variables principales d'une intégrale prennent leurs valeurs particulières initiales, cette intégrale se réduit à une fonction de ses seules variables paramétriques, que nous nommerons sa *détermination initiale*. Dans le système (2) par exemple, la détermination initiale de u est une fonction de y, celle de v une fonction de x. Dans le système (3), celles des intégrales u, v sont toutes deux des fonctions de y.

Si, pour une certaine intégrale, toutes les variables de la question sont principales, sa détermination initiale se réduit à une constante; c'est ce qui arrive toujours dans un système d'équations différentielles totales.

Si, pour une autre, les variables sont toutes paramétriques, sa détermination initiale est fonction de toutes les variables.

352. *La connaissance des déterminations initiales de toutes les intégrales permet aussi bien la reconstruction de leurs développements.*

Il est clair, en effet, que les valeurs initiales des dérivées paramétriques d'une intégrale sont précisément celles des dérivées de tous ordres de sa détermination initiale. La connaissance des déterminations initiales équivaut donc exactement à celle des valeurs initiales des dérivées paramétriques des intégrales, laquelle, d'après le théorème du n° 350, suffit à la reconstruction des développements.

Pour mieux faire apercevoir cette équivalence, considérons par exemple une intégrale $u(x,y)$ dépendant de deux variables, l'une x principale, l'autre y paramétrique, en sorte que $\upsilon(y) = u(x_0, y)$ soit sa détermination initiale. Les valeurs initiales de u et de ses dérivées paramétriques sont

$$u_{x_0,y_0}, \quad \left(\frac{du}{dy}\right)_{x_0,y_0}, \quad \left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)_{x_0,y_0}, \quad \ldots, \quad \left(\frac{d^ku}{dy^k}\right)_{x_0,y_0}, \quad \ldots.$$

Mais on a évidemment

$$\left(\frac{d^ku}{dy^k}\right)_{x_0} = \frac{d^ku(x_0,y)}{dy^k} = \upsilon^{(k)}(y).$$

Les valeurs initiales dont il s'agit sont donc bien égales à

$$\upsilon(y_0), \quad \upsilon'(y_0), \quad \upsilon''(y_0), \quad \ldots, \quad \upsilon^{(k)}(y_0), \quad \ldots,$$

valeurs initiales de la détermination initiale $\upsilon(y)$ et de ses dérivées.

353. Pour un système immédiat partiel comme s'il était tota (**296** *et suiv.*) (**301**), l'existence d'intégrales ordinaires ayant pour déterminations initiales des fonctions de leurs divers groupes de variables paramétriques, *choisies au hasard mais jouissant, bien entendu, de la double propriété d'être toutes olotropes pour les valeurs initiales des variables indépendantes et d'avoir, elles et leurs dérivées premières, des valeurs initiales tombant dans des aires où les composantes des seconds membres des équations du système le sont aussi,* l'existence de ces intégrales, disons-nous, dépend évidemment de ces trois conditions :

I. *Nonobstant la multiplicité des expressions ultimes d'une même dérivée principale d'une intégrale hypothétique* (**348**),

les valeurs initiales qu'elles fournissent de diverses manières pour cette dérivée doivent toujours être toutes numériquement égales entre elles.

II. *Les développements ainsi construits par la méthode des coefficients indéterminés, appliquée exactement comme s'il s'agissait d'une simple reconstruction, doivent avoir quelque système de rayons de convergence non tous nuls.*

III. *Leurs sommes doivent effectivement satisfaire à toutes les équations du système immédiat proposé.*

Quand les deux premières conditions sont remplies, la troisième ne peut manquer de l'être; car les valeurs initiales des fonctions ainsi obtenues satisfont évidemment aux formes initiales des relations ultimes, et par suite à celles des relations primitives, qui leur sont absolument équivalentes (347). Or ces dernières expriment simplement que la substitution de ces fonctions, dans chaque équation du système, en change les deux membres en des fonctions de x, y, z, ... égales numériquement, elles et toutes leurs dérivées, pour $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$, ..., par suite identiquement (189).

Nous n'avons donc à nous occuper que de ces deux premières conditions.

354. La réalisation de la première peut s'opérer : soit par une adaptation convenable de la nature des fonctions choisies pour déterminations initiales des intégrales hypothétiques, à celle des seconds membres des équations du système, soit par une corrélation spéciale entre les seconds membres, en vertu de laquelle la condition dont il s'agit se trouve remplie indépendamment de tel ou tel choix des fonctions prises pour déterminations initiales.

Nous exprimerons l'existence de cette corrélation en disant que le système immédiat proposé est *passif* (*cf.* 297).

On peut ramener à l'intégration de quelque système de cette sorte, la recherche des intégrales des autres qui sont bien loin d'exister toujours (380, *inf.*), et que nous dirons *exceptionnelles* comme au n° 297 pour les équations différentielles totales.

355. *Pour qu'un système immédiat d'équations différen-*

tielles partielles soit passif, il faut et il suffit que les deux expressions ultimes de chaque dérivée complexe seconde d'une fonction inconnue quelconque (348) *soient égales identiquement, c'est-à-dire quelles que soient les valeurs attribuées aux variables, aux fonctions inconnues et à leurs dérivées paramétriques premières et secondes qui y figurent, ces trois sortes de quantités étant considérées un instant comme autant de variables indépendantes.*

Comme pour les équations différentielles totales (298), cette proposition tient : d'une part à ce que le second ordre est le moins élevé de ceux où puissent se rencontrer des dérivées des fonctions inconnues représentables par plusieurs expressions ultimes, d'autre part à ce qu'une identité donnée entraîne toujours à sa suite celles en nombre illimité naissant de sa différentiation et de leurs combinaisons variées à toutes. Mais nous reculons devant les complications matérielles considérables où il faudrait nous engager pour la démontrer catégoriquement dans toute sa généralité.

356. *Le nombre total des conditions de passivité est ainsi égal à la somme de ceux qui, pour chaque fonction inconnue, expriment combien ses variables principales offrent de combinaisons deux à deux.*

Pour des nombres donnés, h, g, de variables indépendantes et de fonctions inconnues, il peut donc varier de 0, valeur minimum à laquelle il s'abaisse quand aucune fonction inconnue n'a plus d'une variable, à $g\,\frac{h(h-1)}{1.2}$, valeur maximum qu'il acquiert quand aucune fonction inconnue n'a de variable paramétrique, c'est-à-dire quand le système immédiat considéré est total (299).

357. Un exemple éclaircira mieux le calcul de ces conditions, et en même temps celui des expressions primitives et ultimes. Nous prendrons le cas le plus simple en considérant le système (1) du n° 339; il comporte une seule fonction inconnue u des trois variables x, y, z, les deux premières principales, la dernière paramétrique.

Les expressions primitives des dérivées du genre 1 dans l'ordre 2 sont

$$(5)\qquad \frac{d^2u}{dx\,dz} = \frac{\partial U_x}{\partial z} + \frac{\partial U_x}{\partial u}\frac{du}{dz} + \frac{\partial U_x}{\partial u'_z}\frac{d^2u}{dz^2},$$

$$(6)\qquad \frac{d^2u}{dy\,dz} = \frac{\partial U_y}{\partial z} + \frac{\partial U_y}{\partial u}\frac{du}{dz} + \frac{\partial U_x}{\partial u'_z}\frac{d^2u}{dz^2},$$

où u'_z a été mis à la place de $\frac{du}{dz}$ pour rendre possible la notation des dérivées des composantes des seconds membres, prises par rapport à celle de leurs variables dont $\frac{du}{dz}$ occupe la place.

Celles de la dérivée complexe $\frac{d^2u}{dx\,dy}$ (ordre 2, genre 2), tirées des première et seconde équations du système, sont respectivement

$$\frac{d^2u}{dx\,dy} = \frac{\partial U_x}{\partial y} + \frac{\partial U_x}{\partial u}\frac{du}{dy} + \frac{\partial U_x}{\partial u'_z}\frac{d^2u}{dy\,dz},$$
$$\frac{d^2u}{dx\,dy} = \frac{\partial U_y}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial U_y}{\partial u'_z}\frac{d^2u}{dx\,dz},$$

et les deux expressions ultimes de la même dérivée s'obtiendront en remplaçant dans celles-ci $\frac{du}{dx}$, $\frac{du}{dy}$, $\frac{d^2u}{dx\,dz}$, $\frac{d^2u}{dy\,dz}$ par les seconds membres des équations (1), (5), (6) respectivement.

Cela posé, la condition de passivité, ici unique, se formera en égalant ces deux expressions ultimes *identiquement,* c'est-à-dire quelles que soient x, y, z, u, $\frac{du}{dz}\,(=u'_z)$, $\frac{d^2u}{dz^2}$, ces six quantités étant considérées comme autant de variables indépendantes les unes des autres.

358. Notons en passant qu'un système immédiat est toujours passif sans conditions, *quand pour chaque fonction inconnue le nombre des variables principales se réduit à* 0 *ou à* 1.

359. Reste la condition essentielle de convergence (353, II); contrairement à ce qui se passe pour les équations différentielles totales (301), *elle n'est pas nécessairement remplie,* et dans les deux paragraphes suivants nous spécifierons précisément un cas

très étendu où elle l'est toujours, et un autre où sa réalisation dépend des circonstances particulières du problème.

Systèmes immédiats passifs qui sont en même temps réguliers.

360. Quand les fonctions inconnues d'un système immédiat peuvent être placées dans un ordre tel, que toute variable qui est principale pour l'une le soit aussi pour toutes les précédentes, nous écrirons de gauche à droite dans cet ordre les colonnes correspondantes de son Tableau et nous dirons qu'il est *régulier*. Les fonctions se rassemblent naturellement ainsi en groupes, où elles ont ou non mêmes variables principales (et paramétriques) selon qu'elles appartiennent au même groupe ou bien à des groupes différents. A ces divers groupes, et en allant de gauche à droite dans le Tableau, nous assignerons les numéros d'ordre 1, 2, 3, ... dont nous nommerons chacun le *rang de régularité* commun des fonctions inconnues appartenant au groupe correspondant.

Dans un système de cette espèce, nous écrirons aussi chaque ligne du Tableau de manière que le nombre des fonctions pour lesquelles la variable correspondante est principale n'aille jamais en augmentant quand on le lit de haut en bas. Les variables se rassemblent ainsi en groupes, dans chacun desquels elles sont principales pour les mêmes fonctions, et auxquels nous attribuerons aussi les *rangs de régularité* 1, 2, 3, ... en descendant.

Le système (3) du n° 343, par exemple, est régulier, et les deux fonctions inconnues y ont le même rang; plus généralement aussi, *tout système où les variables se partagent en deux groupes où, pour toutes les fonctions inconnues, elles sont principales dans l'un, paramétriques dans l'autre. Tels sont en particulier les systèmes d'équations différentielles totales* puisque les diverses variables y sont toujours principales, et aussi ce que l'on nomme habituellement les équations *aux dérivées partielles* (isolées ou simultanées).

Le système écrit ci-après est encore régulier s'il est immédiat, c'est-à-dire (342) si les dérivées paramétriques de chaque fonction ne figurent jamais dans les seconds membres d'une colonne postérieure :

	(u).	(v).	(w).	(s).
(x)	$\dfrac{du}{dx} = \ldots$	$\dfrac{dv}{dx} = \ldots$	$\dfrac{dw}{dx} = \ldots$	
(y)	$\dfrac{du}{dy} = \ldots$	$\dfrac{dv}{dy} = \ldots$		
(z)	$\dfrac{du}{dz} = \ldots$			
(t)				

Nous appellerons *irréguliers* les systèmes pour lesquels cette disposition des fonctions inconnues n'est pas réalisable, par exemple, le système (2 *bis*) du n° 343.

361. Nous dirons encore qu'un système immédiat est *linéaire*, quand les dérivées (paramétriques) des fonctions inconnues entrent toutes linéairement dans chacune de ses équations. Un quelconque de leurs seconds membres se réduit alors à une somme de termes dont l'un est une certaine fonction des variables et des fonctions inconnues seulement, dont chaque autre est le produit d'une pareille fonction par quelque dérivée paramétrique.

Par exemple, l'équation aux dérivées partielles

	(u).
(x)	$\dfrac{du}{dx} = U_x\left(x, y, u, \dfrac{du}{dy}\right)$
(y)	

constitue un système linéaire si son second membre est de la forme

$$U_x^{(0)}(x, y, u) + U_x^{(1)}(x, y, u)\frac{du}{dy}.$$

Il faut aussi rattacher les équations différentielles totales aux systèmes linéaires, puisque leurs seconds membres ne renferment

point de dérivées, et qu'ainsi ils n'en contiennent aucune d'une manière non linéaire.

362. *Représentons, pour abréger, par*

(1) $$[iprl]$$

un système quelconque d'équations différentielles partielles, à la fois immédiat (338), (342), *passif* (354), (355), *régulier* (360) *et linéaire* (361), *entre les g fonctions inconnues*

(2) $$u,\ v,\ \ldots$$

des h variables indépendantes

(3) $$x,\ y,\ \ldots.$$

et soient

(4) $$\ldots,\ o(x, y, \ldots, u, v, \ldots),\ \ldots$$

les fonctions de toutes ces quantités qui constituent les coefficients des seconds membres considérés comme expressions linéaires par rapport aux dérivées paramétriques des fonctions inconnues.

Soient encore

(5) $$S_u,\ S_v,\ \ldots,$$

(6) $$S_x,\ S_y,\ \ldots$$

des aires limitées, à l'intérieur desquelles les fonctions (4) *demeurent toutes olotropes.*

Appelons encore

(7) $$\upsilon,\ \varphi,\ \ldots$$

des fonctions des variables paramétriques de u, v, ..., jouissant de la double propriété d'être toutes olotropes dans les aires (6) *et de n'y prendre jamais que des valeurs tombant dans les aires* (5) *respectivement.*

Cela posé, en

(8) $$x_0,\ y_0,\ \ldots$$

valeurs initiales des variables prises à volonté dans les aires (6),

le système (1) *possède certainement un groupe d'intégrales ordinaires ayant les fonctions* (7) *pour déterminations initiales.*

En vertu des considérations exposées à la fin du paragraphe précédent (n°s 353 *et suiv.*), il nous suffit, pour établir ce théorème, de prouver simplement que *les développements des intégrales hypothétiques satisfaisant aux conditions initiales posées admettent quelque groupe commun de rayons de convergence non tous nuls.* Nous y réussirons comme il suit [1].

1. *En appelant*

$$\tau, \quad \varkappa$$

une variable indépendante et une fonction inconnue de cette variable; en appelant encore

$$(9) \qquad \gamma, \quad \eta, \quad \mu, \quad \varepsilon < 1$$

quatre constantes positives quelconques, mais dont la dernière est essentiellement inférieure à 1, *et posant pour plus de simplicité*

$$(10) \qquad \frac{1}{1-(\gamma\varkappa+\eta\tau)} = \omega(\gamma\varkappa+\eta\tau),$$

l'équation différentielle

$$(11) \qquad \frac{d\varkappa}{d\tau} = \mu.\omega(\gamma\varkappa+\eta\tau) : [1-\varepsilon.\omega(\gamma\varkappa+\eta\tau)],$$

complétée par la condition initiale

$$\varkappa = 0 \quad \text{pour} \quad \tau = 0,$$

a pour intégrale une fonction $\varkappa(\tau)$ *qui en* $\tau = 0$ *est olotrope et a pour dérivées de tous ordres des quantités essentiellement positives.*

En $\tau = \varkappa = 0$, par suite dans des aires S_τ, $S_\varkappa$, de dimensions suffisamment petites, délimitées autour de ces deux points, la fonction (10) est olotrope comme inverse arithmétique de la

[1] Ce théorème ayant fort peu d'applications *classiques*, la démonstration suivante peut être omise dans une première lecture.

fonction olotrope $1-(\gamma\mathfrak{s}+\eta_1\tau)$ qui ne s'y évanouit pas (250, II); et de même pour

(12) $$\frac{1}{1-\varepsilon.\omega(\gamma\mathfrak{s}+\eta_1\tau)},$$

inverse arithmétique de $1-\varepsilon.\omega(\gamma\mathfrak{s}+\eta_1\tau)$, fonction qui est olotrope par ce qui précède, et qui dans S_τ, $S_\mathfrak{s}$, si ces aires ont été choisies assez petites, ne prend que des valeurs extrêmement voisines de $1-\varepsilon$, partant non $=0$.

Dans les aires considérées, le second membre de l'équation (11) reste donc olotrope, comme produit de la constante μ par les deux fonctions de cette espèce (10), (12). Le théorème du n° 301 est donc applicable à cette équation, cas particulier le plus simple des systèmes immédiats et passifs d'équations différentielles totales.

Maintenant, les valeurs initiales des dérivées partielles de tous ordres sont essentiellement positives : d'abord pour la fonction (10) qu'on peut écrire

$$1+(\gamma\mathfrak{s}+\eta_1\tau)+(\gamma\mathfrak{s}+\eta_1\tau)^2+\ldots,$$

puis pour la fonction (12) dont le développement donne de même

$$1+\varepsilon.\omega(\gamma\mathfrak{s}+\eta_1\tau)+\varepsilon^2\omega^2+\ldots,$$

par suite enfin, pour le second membre de l'équation différentielle (11), simple produit de ces deux fonctions par la constante positive μ.

Les valeurs initiales de $\frac{d\mathfrak{s}}{d\tau}$, $\frac{d^2\mathfrak{s}}{d\tau^2}$, $\cdots$ sont donc toutes aussi réelles et positives; car, en vertu des formules ultimes appliquées à leur calcul, elles se présentent toutes sous forme d'expressions entières, sans aucun signe —, par rapport aux valeurs initiales des dérivées partielles du second membre de notre équation différentielle, toutes positives comme nous venons de le constater.

II. *Soient*

(13) $$u_0,\ v_0,\ \ldots$$

les valeurs initiales des fonctions (2) [*ou* (7)], *c'est-à-dire celles qu'elles acquièrent quand leurs variables prennent les valeurs qu'elles ont dans la suite* (8), *et considérons les* g *fonctions*

des h variables

(14) $$\mathfrak{x},\ \mathfrak{y},\ \ldots,$$

que définissent les formules

(15) $$\left\{\begin{array}{l} \mathfrak{u} = u_0 + \text{ȣ}[(\mathfrak{x} - x_0) + (\mathfrak{y} - y_0) + \ldots], \\ \mathfrak{v} = v_0 + \text{ȣ}[(\mathfrak{x} - x_0) + (\mathfrak{y} - y_0) + \ldots], \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

et qui, pour les valeurs (8) *de leurs variables, sont toutes olotropes* (I) *et égales aux quantités* (13) *respectivement* [*à cause de* $\text{ȣ}(0) = 0$].

Si l'on pose

(16) $$\frac{\Upsilon}{g} = \mathfrak{g},$$

ces nouvelles fonctions satisfont aux équations différentielles partielles

(17) [irl]

formant un système immédiat, régulier et linéaire dont la notation se déduit de celle du proposé (1) *en écrivant partout dans celui-ci*

$$\frac{d\mathfrak{u}}{d\mathfrak{x}},\ \frac{d\mathfrak{u}}{d\mathfrak{y}},\ \ldots,\ \frac{d\mathfrak{v}}{d\mathfrak{x}},\ \ldots$$

au lieu de

$$\frac{du}{dx},\ \frac{du}{dy},\ \ldots,\ \frac{dv}{dx},\ \ldots,$$

puis, dans chacun des seconds membres, en substituant à celle des fonctions (4) *qui ne multiplie aucune dérivée, le produit de*

(18) $$\omega[\mathfrak{g}(\mathfrak{u} - u_0 + \mathfrak{v} - v_0 + \ldots) + \eta(\mathfrak{x} - x_0 + \mathfrak{y} - y_0 + \ldots)]$$

par la constante μ, *et à celles qui multiplient des dérivées, les produits de cette même fonction par de nouvelles constantes positives*

(19) $$\ldots,\ \mathfrak{m},\ \ldots,$$

choisies arbitrairement et d'une manière définitive sous la

seule condition de satisfaire (pour chaque équation différentielle) à la relation

$$(20) \qquad \ldots + \mathfrak{m} + \ldots = \varepsilon.$$

En faisant, pour abréger,

$$(\mathfrak{x} - x_0) + (\mathfrak{y} - y_0) + \ldots = \tau,$$

toutes les dérivées premières des fonctions (15) sont égales à $\varkappa'(\tau)$; à cause de la relation (16), la fonction (18) se réduit à $\omega[\gamma.\varkappa(\tau) + \eta\tau]$.

Il en résulte que la substitution des fonctions (15) dans l'une quelconque des équations différentielles (17) donne

$$\varkappa'(\tau) = \mu.\omega[\gamma.\varkappa(\tau) + \eta\tau] + (\ldots + \mathfrak{m} + \ldots)\,\omega[\gamma.\varkappa(\tau) + \eta\tau]\,\varkappa'(\tau),$$

ou bien, à cause de la condition (20),

$$\varkappa'(\tau) = \mu.\omega[\gamma.\varkappa(\tau) + \eta\tau] : \{1 - \varepsilon\omega[\gamma.\varkappa(\tau) + \eta\tau]\},$$

ce qui a lieu effectivement en vertu de l'équation différentielle (11).

III. *Soient* α, β *deux nouvelles quantités positives satisfaisant aux inégalités*

$$(21) \qquad \alpha < 1, \qquad \beta > 1;$$

appelons

$$(22) \qquad \bar{\mathfrak{u}}, \quad \bar{\mathfrak{v}}, \quad \ldots$$

les fonctions de $x, y, \ldots$ *dans lesquelles se changent les fonctions* (15) *par les substitutions*

$$(23) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathfrak{t}^{(i)} = t_0^{(i)} + \alpha^i[t^{(i)} - t_0^{(i)}], \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right.$$

où $t^{(i)}$, $\mathfrak{t}^{(i)}$ *désignent généralement les variables homologues de rang de régularité i* (360) *dans les suites parallèles* (3), (14) ; *appelons encore*

$$(24) \qquad \text{U}, \quad \text{V}, \quad \ldots$$

les fonctions de $x, y, \ldots$ définies par les formules

$$(25)\quad \left\{\begin{array}{l} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ S^{(j)} = s_0^{(j)} + \dfrac{1}{\beta^j}\left(\bar{\mathfrak{s}}^{(j)} - s_0^{(j)}\right), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

où $s_0^{(j)}$, $\bar{\mathfrak{s}}^{(j)}$, $S^{(j)}$ désignent les objets homologues de rang de régularité j dans les suites parallèles (13), (22), (24).

Cela posé, les fonctions (24) *satisfont à un certain système d'équations différentielles partielles, immédiat, régulier et linéaire*

(26) [IRL],

semblable au système (17), *par suite au proposé* (1), *dont, par un choix convenable des constantes encore indéterminées* (21), *on peut rendre les coefficients des seconds membres*

$$(27)\qquad \ldots,\quad O(x, y, \ldots; U, V, \ldots),\quad \ldots$$

des fonctions majorantes (300) *relativement aux valeurs initiales* (8), (13), *pour les coefficients des seconds membres des équations du système proposé qui leur correspondent dans la suite* (4).

On obtiendra évidemment les équations différentielles voulues (26) entre les fonctions (24), en transformant les équations (17) par les substitutions

$$t^{(i)} - t_0^{(i)} = \alpha^i[\,t^{(i)} - t_0^{(i)}],\qquad \mathfrak{s}^{(j)} - s_0^{(j)} = \beta^j[\,S^{(j)} - s_0^{(j)}],\qquad \frac{d\mathfrak{s}^{(j)}}{dt^{(i)}} = \frac{\beta^j}{\alpha^i}\frac{dS^{(j)}}{dt^{(i)}},$$

puis divisant chacune d'elles par le facteur constant qui s'est introduit dans son premier membre. Leur type est ainsi

$$(28)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{dS^{(j)}}{dt^{(i)}} = \dfrac{\beta^{-j}}{\alpha^{-i}}\,\mu.\omega\{\ldots + g\beta^{j''}[S^{(j'')} - s_0^{(j'')}] + \ldots \\ \qquad\qquad\qquad + \eta_1\alpha^{i''}[\,t^{(i'')} - t_0^{(i'')}] + \ldots\} + \ldots \\ \qquad + \dfrac{\beta^{j'-j}}{\alpha^{i'-i}}\,\mathfrak{m}.\omega\{\ldots + g\beta^{j''}[S^{(j'')} - s_0^{(j'')}] + \ldots \\ \qquad\qquad\qquad + \eta_1\alpha^{i''}[\,t^{(i'')} - t_0^{(i'')}] + \ldots\}\,\dfrac{dS^{(j')}}{dt^{(i')}} + \ldots \end{array}\right.$$

Prouvons d'abord que les constantes analogues à

$$\frac{\beta^{j'-j}}{\alpha^{i'-i}}\,\mathfrak{m},$$

multipliant la fonction ω dans les coefficients des dérivées paramétriques, peuvent être toutes rendues supérieures à une même quantité positive donnée $\mathfrak{M}$, si grande qu'elle soit. En appelant $\mathfrak{m}$ la plus petite de toutes les quantités ..., $\mathfrak{m}$, ... dans tous les seconds membres des équations (28), la constante ci-dessus écrite est toujours égale au moins à

$$\frac{\beta^{j'-j}}{\alpha^{i'-i}}\,\mathfrak{m}.$$

Cela posé, si $j'>j$, la différence $i'-i$ peut avoir une valeur quelconque comprise entre $-h$ et $+h$, h désignant toujours le nombre total des variables; à cause des conditions (21) la plus petite valeur de cette expression est donc

$$\beta\alpha^h\mathfrak{m}.$$

Si $j'=j$, on a nécessairement $i'>i$, parce qu'alors, pour $S^{(j')}$ comme pour $S^{(j)}$, la variable $t^{(i)}$ est principale et l'autre $t^{(i')}$ est paramétrique. La plus petite valeur de la même expression est donc

$$\frac{1}{\alpha}\,\mathfrak{m}.$$

Le cas de $j'<j$ ne peut d'ailleurs se présenter; car alors, une variable au moins, paramétrique pour $S^{(j)}$, serait principale pour $S^{(j')}$ (**360**) et, contrairement à la restriction fondamentale du n° **342**, l'équation (28) appartenant à la colonne $[S^{(j)}]$ contiendrait dans son second membre la dérivée $\frac{dS^{(j')}}{dt^{(i')}}$ de l'intégrale $S^{(j')}$.

Pour obtenir le résultat voulu, il suffit donc de satisfaire aux inégalités

$$\beta\alpha^h\mathfrak{m}>\mathfrak{M},\qquad \frac{1}{\alpha}\,\mathfrak{m}>\mathfrak{M},$$

c'est-à-dire de prendre

(29) $$\alpha<\frac{\mathfrak{m}}{\mathfrak{M}},\qquad\text{puis}\qquad \beta>\frac{\mathfrak{M}}{\alpha^h\mathfrak{m}},$$

ce que permettent les conditions (21).

Ces valeurs de α, β étant ainsi déterminées, on rendra aussi tous supérieurs à $\mathfrak{M}$ les multiplicateurs constants de la fonction ω dans les premiers termes des seconds membres des équations du système (26) [toutes de la forme (28)], en tirant μ de l'inégalité

$$\frac{\beta^{-g}}{\alpha^{-h}}\mu > \mathfrak{M}$$

dont le premier membre est la plus petite valeur de ces multiplicateurs à cause des conditions (21) et de ce que g, h surpassent ou égalent au moins les plus grandes valeurs des rangs de régularité j, i. Il vient ainsi

$$\mu > \frac{\beta^g}{\alpha^h}\mathfrak{M}, \tag{30}$$

valeur possible puisque jusqu'ici μ était indéterminée.

Dans la fonction ω, on rendra enfin les multiplicateurs des différences

$$\ldots,\quad (S^{(j'')} - S_0^{(j'')}),\quad \ldots,\quad (t^{(i'')} - t_0^{(i'')}),\quad \ldots,$$

tous supérieurs à une même quantité positive quelconque $\mathfrak{N}$ en satisfaisant aux inégalités

$$\gamma\beta > \mathfrak{N},\quad \eta\alpha^h > \mathfrak{N},$$

dont les premiers membres sont encore évidemment leurs valeurs minimums. A cause de la relation (16) ces conditions sont satisfaites en prenant

$$\gamma > \frac{g}{\beta}\mathfrak{N},\quad \eta > \frac{\mathfrak{N}}{\alpha^h}, \tag{31}$$

ce qui est encore possible puisque γ, η étaient restées arbitraires.

Les constantes α, β, μ, γ, η ayant été déterminées successivement ainsi par les inégalités (29), (30), (31), les valeurs initiales des dérivées partielles de l'un quelconque des coefficients (27) des seconds membres de notre système auxiliaire (26) seront évidemment des quantités positives supérieures aux valeurs initiales des dérivées semblables de

$$\left\{\begin{aligned} &\mathfrak{M}.\omega[\mathfrak{N}(x - x_0 + y - y_0 + \ldots + U - u_0 + V - v_0 + \ldots)] \\ &\quad = \frac{\mathfrak{M}}{1 - \mathfrak{N}(x - x_0 + y - y_0 + \ldots + U - u_0 + V - v_0 + \ldots)}. \end{aligned}\right. \tag{32}$$

Or, en appelant δ le plus petit des olomètres des fonctions (4) dans les aires (5) (6), puis δ' une quantité positive $< \delta$, puis r une seconde $< \delta'$, puis enfin M une limite supérieure commune des modules que toutes ces fonctions peuvent acquérir dans les mêmes aires accrues de zones d'épaisseur δ', on trouvera, en raisonnant comme au n° 301, I, qu'en prenant

$$\mathfrak{M} > \mathrm{M}, \quad \mathfrak{N} > \frac{1}{r},$$

la fonction (32) est, relativement aux valeurs initiales (8) (13), majorante pour l'une quelconque des fonctions (4). A plus forte raison les fonctions (27) sont donc majorantes pour leurs homologues parmi ces dernières.

IV. *On peut en même temps faire en sorte que chacune des déterminations initiales*

(33) $$\Upsilon, \quad \Phi, \quad \ldots$$

des intégrales (24) *de notre système auxiliaire* (26) *soit majorante pour la fonction correspondante du groupe* (7), *relativement aux valeurs initiales que leurs variables communes ont dans la suite* (8), *cela du moins, non pour les valeurs initiales de ces fonctions elles-mêmes, mais pour celles de leurs dérivées de tous ordres.*

D'après les formules (15), (23), (25), les fonctions (24) sont du type

$$s_0^{(j)} + \frac{1}{\beta^j}\,\mathfrak{v}[\ldots + \alpha^i(t'^{(i)} - t_0^{(i)}) + \ldots];$$

et, comme d'une part les plus petites valeurs de α^i, $\frac{1}{\beta^j}$ sont α^h, $\frac{1}{\beta^g}$ à cause des inégalités (21) et $i \leqq h$, $j \leqq g$, comme d'autre part les valeurs initiales des dérivées de la composante $\mathfrak{v}(\tau)$ sont essentiellement positives (I), les valeurs initiales des dérivées des fonctions précitées le sont toutes aussi et surpassent toujours celles des dérivées semblables du produit de la fonction

$$\lambda(x, y, \ldots) = \mathfrak{v}[\alpha^h(x - x_0 + y - y_0 + \ldots)]$$

par la constante $\frac{1}{\beta^g}$.

A cause de l'équation différentielle (11), cette dernière fonction λ satisfait évidemment aux équations différentielles totales

$$(34) \left\{ \begin{aligned} \frac{d\lambda}{dx} = \frac{d\lambda}{dy} = \ldots = \mu\alpha^h \omega[\gamma\lambda + \eta\alpha^h(x - x_0 + y - y_0 + \ldots)]: \\ \{1 - \varepsilon.\omega[\gamma\lambda + \eta\alpha^h(x - x_0 + y - y_0 + \ldots)]\}. \end{aligned} \right.$$

Comme la valeur initiale de λ est nulle à cause de $\omega(0) = 0$, celle essentiellement positive qui est commune à toutes ses dérivées d'ordre quelconque k surpasse celle également positive qui est commune à toutes les dérivées d'ordre $k - 1$ de la fonction

$$\mu\alpha^h \omega[\eta\alpha^h(x - x_0 + y - y_0 + \ldots)] = \frac{\mu\alpha^h}{1 - \eta\alpha^h(x - x_0 + y - y_0 + \ldots)}.$$

Effectivement, la réduction de γ, ε à 0 dans le dernier membre des équations différentielles (34) ne fait qu'enlever des termes positifs aux expressions primitives, et par suite aussi aux expressions ultimes des valeurs initiales des dérivées de leur intégrale qui coïncide avec notre fonction λ, parce que ces expressions sont toutes entières et sans aucun signe —.

De tout ceci il résulte que les valeurs initiales des dérivées d'ordre k de l'une quelconque des fonctions (24) surpassent la valeur commune de celles des dérivées d'ordre $k - 1$ de la fonction

$$(35) \qquad \frac{\alpha^h}{\beta^g} \frac{\mu}{1 - \eta\alpha^h(x - x_0 + y - y_0 + \ldots)}.$$

Nommons maintenant δ_1 le plus petit des olomètres des fonctions (7) dans les aires (6), puis δ'_1 une quantité positive $< \delta_1$, puis r_1, une autre $< \delta'_1$, puis enfin M_1 une limite supérieure commune aux modules de toutes les valeurs que les dérivées premières de ces mêmes fonctions peuvent acquérir dans les aires en question accrues de zones additionnelles d'épaisseur δ'_1. On trouvera facilement, en raisonnant comme au n° 301, I, que, si l'on a

$$(36) \qquad \frac{\alpha^h}{\beta^g} \mu > M_1, \quad \eta\alpha^h > \frac{1}{r_1},$$

le module de la valeur initiale d'une dérivée d'ordre k de telle des fonctions (7) qu'on voudra, v par exemple, est toujours inférieur à la valeur initiale de toute dérivée d'ordre $k - 1$ de la fonc-

tion (35); ce même module est donc, à plus forte raison, inférieur à la valeur initiale de toute dérivée d'ordre k de la fonction $\frac{1}{\beta g}\lambda$, à plus forte raison inférieur à celle de toute dérivée d'ordre k de telle des fonctions (24) que l'on voudra, en particulier de U, inférieur notamment si on le veut à la valeur initiale de la dérivée de U qui est semblable à celle de v dont il s'agit. Or cette dérivée de U coïncide précisément avec la dérivée semblable de Υ.

Pour conférer aux déterminations initiales (33), comparées respectivement à (7), le caractère majorant voulu, il suffit donc en vertu des inégalités (36), que l'on prenne

$$\mu > \frac{\beta g}{\alpha^h} M_1, \quad \tau_i > \frac{1}{\alpha^h r_1},$$

ce que permettent évidemment les conditions (30), (31), les seules auxquelles jusqu'ici ces deux quantités aient été assujetties.

V. *Supposons désormais que toutes les quantités* γ, τ_i, μ, ε, ..., $\mathfrak{m}$, ..., α, β *aient été choisies dans les conditions successivement expliquées, que par suite, et relativement aux valeurs initiales* (8), *entièrement arbitraires dans les aires* (6), *et* (13) *dépendant de celles-ci mais tombant dans les aires* (5), *le caractère majorant ait été ainsi conféré, tant aux fonctions* (27) *pour les fonctions* (4), *qu'aux fonctions* (33) *pour les fonctions* (7) *respectivement. Les modules des dérivées des valeurs initiales des intégrales hypothétiques du système proposé* (1), *ayant les déterminations initiales* (7), *sont inférieurs respectivement aux valeurs initiales des dérivées semblables des intégrales correspondantes* (24) *du système auxiliaire semblable* (26).

Le point dont il s'agit est évident pour les dérivées paramétriques, puisque (IV) les déterminations initiales (33) des intégrales du système auxiliaire sont précisément des fonctions majorantes pour celles (7) des intégrales hypothétiques du système proposé.

Pour les autres, il suffit d'observer : d'abord que dans tout sys-

tème linéaire l'expression ultime de la valeur initiale d'une dérivée principale est essentiellement entière et sans aucun signe —, par rapport aux valeurs initiales des dérivées partielles tant des déterminations initiales des intégrales (certaines ou hypothétiques), que des fonctions jouant le rôle de coefficients dans les seconds membres; ensuite, que par hypothèse les valeurs initiales de toutes ces dérivées partielles sont positives pour le système auxiliaire et respectivement supérieures aux modules des quantités correspondantes pour le système proposé; enfin, que par suite de la similitude complète des systèmes (26), (1), les expressions ultimes construites pour le système auxiliaire se déduisent de celles construites pour le proposé, par la simple substitution des valeurs initiales dont il s'agit, aux quantités correspondantes pour le proposé.

VI. D'après cela, il est évident que *les développements des intégrales hypothétiques du système considéré* (1) *ont des rayons de convergence égaux au moins aux valeurs qu'ils ont pour les fonctions* (24), *intégrales du système auxiliaire; ils sont par suite tous différents de zéro.* C'est ce que nous voulions prouver.

363. La détermination des constantes μ, γ, η, ε, α, β ayant été effectuée comme nous l'avons expliqué, il est facile, d'après ce qui a été dit au n° **301**, d'en conclure une limite inférieure de l'olomètre en $\tau = 0$, de l'intégrale $\theta(\tau)$ de l'équation (11), ensuite, et d'après la théorie des fonctions composées, d'en assigner une aux olomètres des fonctions (15), puis à ceux des fonctions (22), c'est-à-dire à ceux des intégrales auxiliaires (24), qui, précisément comme nous venons de le constater, appartiennent aux intégrales du système linéaire considéré (1). Des considérations du genre de celles qui ont été exposées au n° **302**, VI, nous dispensent de nous préoccuper de leur grandeur; il nous suffit de noter que *leur limite inférieure déterminée comme ci-dessus est absolument indépendante de la position des valeurs initiales* (8) *des variables dans les aires* (6). En conséquence, on peut, *en cheminant dans ces aires, prolonger les premiers développements obtenus pour ces intégrales, aussi longtemps que les fonctions de leurs variables paramétriques, auxquelles elles se réduisent*

quand on fixe leurs variables principales aux valeurs qu'elles ont transitoirement acquises, conservent les propriétés dont leurs déterminations initiales doivent jouir pour que le théorème du n° **362** *subsiste.*

C'est tout ce qu'il nous est possible de dire sur ce sujet sans sortir des généralités.

364. Tous ces points une fois bien compris peuvent être résumés dans cet énoncé infiniment plus bref : *Un système quelconque d'équations différentielles partielles, quand il est immédiat, passif, régulier et linéaire, possède des intégrales ordinaires qui restent (localement) olotropes aussi longtemps que le demeurent elles-mêmes et leurs déterminations initiales et les fonctions jouant le rôle de coefficients dans les seconds membres.*

365. *L'intégration de tout système immédiat, passif et régulier, peut être ramenée à celle d'un autre jouissant de cette triple propriété, mais de plus linéaire.*

I. Soit d'abord le système (1) du n° **339**, supposé passif, avec la condition initiale

$$(37) \qquad u = \upsilon(z) \quad \text{pour} \quad \begin{cases} x = x_0, \\ y = y_0. \end{cases}$$

A son Tableau nous ajouterons à droite une seconde colonne; dans la case vide de la première colonne du nouveau Tableau, nous écrirons l'équation différentielle

$$\frac{du}{dz} = u',$$

u' désignant une nouvelle fonction inconnue qui correspondra à la deuxième colonne et qu'en vertu de l'équation précédente nous substituerons à $\frac{du}{dz}$ dans les deux équations primitivement données.

Dans la première et la seconde case de la deuxième colonne respectivement, nous écrirons les équations différentielles formées

en égalant $\frac{du'}{dx}, \frac{du'}{dy}$ aux résultats de la différentiation par rapport à z des seconds membres des équations données dans lesquels on remplace partout $\frac{du}{dz}$ par u'.

Il vient ainsi le système aux mêmes variables, mais aux deux fonctions inconnues u, u',

	$\frac{du}{dx} = U_x(x, y, z, u, u')$	$\frac{du'}{dx} = \frac{\partial U_x}{\partial z} + \frac{\partial U_x}{\partial u} u' + \frac{\partial U_x}{\partial u'} \frac{du'}{dz}$
(38)	$\frac{du}{dy} = U_y(x, y, z, u, u')$	$\frac{du'}{dy} = \frac{\partial U_y}{\partial z} + \frac{\partial U_y}{\partial u} u' + \frac{\partial U_x}{\partial u'} \frac{du'}{dz}$
	$\frac{du}{dz} = u'$	

qui est maintenant immédiat, régulier, linéaire et de plus passif. Car :

1° La condition de passivité $\left[\frac{d^2 u}{dx\, dy}\right]$, provenant de l'identification des deux expressions ultimes de $\frac{d^2 u}{dx\, dy}$ dans le nouveau système, n'est pas autre chose que celle du système non linéaire donné, écrite avec une notation différente;

2° Les conditions $\left[\frac{d^2 u}{dx\, dz}\right]$, $\left[\frac{d^2 u}{dy\, dz}\right]$ sont satisfaites d'elles-mêmes, à cause du choix fait pour les équations différentielles de la deuxième colonne;

3° La dernière condition $\left[\frac{d^2 u'}{dx\, dy}\right]$ se réduit, sauf une notation différente, à l'identité des expressions ultimes de $\frac{d^3 u}{dx\, dy\, dz}$ relativement au système non linéaire proposé.

Enfin, il est clair que la première des intégrales u, u', du système linéaire (38) complété par les conditions initiales

$$u = \upsilon(z_0) \quad \text{pour} \quad x = x_0, \quad y = y_0, \quad z = z_0,$$
$$u' = \upsilon'(z) \quad \text{pour} \quad x = x_0, \quad y = y_0,$$

satisfait au système non linéaire considéré, ainsi qu'à la condition initiale annexe (37).

II. Soit encore le système à une seule colonne

(39)

$\frac{du}{dx} = U_x\left(x, y, z, u, \frac{du}{dy}, \frac{du}{dz}\right)$

avec la condition initiale

(40) $$u = \upsilon(y, z) \quad \text{pour} \quad x = x_0.$$

Nous le remplacerons par le système, maintenant à deux colonnes de plus,

(41)

$\frac{du}{dx} = U_x(x, y, z, u, u'_y, u'_z)$	$\frac{du'_z}{dx} = \frac{\partial U_x}{\partial z} + \frac{\partial U_x}{\partial u} u'_z + \frac{\partial U_x}{\partial u'_y} \frac{du'_y}{dz} + \frac{\partial U_x}{\partial u'_z} \frac{du'_z}{dz}$	$\frac{du'_y}{dx} = \frac{\partial U_x}{\partial y} + \ldots$
$\frac{du}{dy} = u'_y$	$\frac{du'_z}{dy} = \frac{du'_y}{dz}$	
$\frac{du}{dz} = u'_z$		

qui est encore à simple vue immédiat, régulier et linéaire. Les conditions de passivité provenant de l'identification des deux expressions ultimes des dérivées complexes secondes de u sont remplies à cause des équations des deux dernières colonnes. Quant à la dernière $\left[\frac{d^2 u'_z}{dx\, dy}\right]$, elle l'est, moyennant quelque changement dans la notation, à cause de l'identité des développements des deux expressions

$$\frac{d}{dy}\,\frac{dU_x\left(x, y, z, u, \frac{du}{dy}, \frac{du}{dz}\right)}{dz}, \quad \frac{d}{dz}\,\frac{dU_x\left(x, y, z, u, \frac{du}{dy}, \frac{du}{dz}\right)}{dy}.$$

Finalement, les conditions initiales à annexer au système transformé (41) pour que son intégrale représentée par la lettre u coïncide avec celle du système proposé (39), précisée par la condition initiale proposée (40), sont évidemment

$$u = \upsilon(y_0, z_0) \quad \text{pour} \quad \begin{cases} x = x_0, \\ y = y_0, \\ z = z_0, \end{cases}$$

$$u'_z = \upsilon'_z(y_0, z) \quad \text{pour} \quad \begin{cases} x = x_0, \\ y = y_0, \end{cases} \qquad u'_y = \upsilon'_y(y, z) \quad \text{pour} \quad x = x_0.$$

III. Maintenant le lecteur doit apercevoir la règle générale à suivre pour opérer la transformation dont il s'agit :

1° On adjoint aux fonctions inconnues du système non linéaire proposé de nouvelles fonctions inconnues égales en nombre et en valeurs à leurs diverses dérivées paramétriques.

2° On écrit dans les cases vides du Tableau primitif de nouvelles équations différentielles exprimant cette égalité entre les nouvelles fonctions inconnues et les dérivées paramétriques des anciennes.

3° D'autres nouvelles équations différentielles sont encore formées par les conditions de passivité relatives aux dérivées complexes secondes de chaque fonction inconnue du système primitif, prises les unes par rapport à une de ses anciennes et une de ses nouvelles variables principales, les autres par rapport à deux variables qui de paramétriques sont devenues principales. Ces équations différentielles de la première sorte sont placées à l'intersection des nouvelles colonnes du Tableau et de lignes déterminées; celles de la seconde sorte sont écrites dans d'autres cases des nouvelles colonnes sous une forme telle, ces nouvelles colonnes sont placées, relativement aux anciennes et les unes aux autres, d'une manière telle, que le nouveau système soit bien immédiat (342) et régulier (360).

4° Les déterminations initiales des fonctions inconnues du nouveau système s'obtiennent en donnant leurs valeurs initiales, à tout ou partie des variables primitivement paramétriques, dans les déterminations initiales annexées au système primitif et dans quelques-unes de leurs dérivées.

Nous nous en tiendrons aux exemples traités et à ces indications générales, pour ne pas nous engager dans des détails d'une longueur et d'une aridité extrêmes. Ils ajouteraient peu de clarté à ce que nous avons dit sur cette question; nous l'avons d'ailleurs creusée plus profondément qu'il ne nous sera nécessaire.

366. Dans le système linéaire qui peut ainsi remplacer tout système immédiat passif et régulier, les coefficients des seconds membres sont : ou les nouvelles fonctions inconnues, ou l'unité, ou les composantes des seconds membres du système non linéaire, ou leurs dérivées partielles, ou bien des expressions entières par rapport à ces dernières et aux nouvelles fonctions inconnues. Les nouvelles déterminations initiales sont aussi les anciennes et leurs dérivées premières, dans lesquelles tout ou partie des variables sont fixées à leurs valeurs initiales.

Si donc pour le système non linéaire, les composantes des seconds membres sont toutes olotropes ainsi que les déterminations initiales données, pour le système linéaire équivalent les fonctions qui forment les coefficients des seconds membres et les déterminations initiales le seront toutes aussi. Comme d'ailleurs ce dernier système est en outre immédiat, passif et régulier, le théorème du n° 362, élargi et résumé au n° 364, lui est en tout applicable, et il conduit au suivant, qui est plus général et fondamental :

Quand un système quelconque d'équations différentielles partielles, même non linéaire, est immédiat, passif et régulier, il a des intégrales ordinaires ayant des déterminations initiales données quelconques, qui sont (localement) olotropes aussi longtemps que jouissent de cette propriété, tant les composantes de ses seconds membres, que les déterminations initiales adoptées pour la construction des premiers développements et que celles à déduire successivement de ces premiers développements pour former les développements ultérieurs.

Ici, comme aux nos 302 *et suiv.* pour les équations différentielles totales, nous entendons par le mot *intégrales* les premiers développements poursuivis ensuite par cheminement aussi bien que faire se peut (172 *et suiv.*).

367. Comme pour les équations différentielles totales et pour

la même raison (302, II), *un système d'équations différentielles partielles immédiat ne peut posséder qu'un seul groupe d'intégrales répondant à des déterminations initiales données.*

368. *Quand les conditions initiales restent indéterminées, les intégrales du système le sont elles-mêmes,* mais leurs éléments d'indétermination ne sont plus, tant s'en faut, les paramètres en nombre essentiellement limité qui figurent dans celles des équations différentielles totales (303); *ce sont, avec les valeurs initiales des fonctions inconnues dépourvues de variables paramétriques, les suites simplement, doublement, etc., infinies, des coefficients des développements des déterminations initiales des fonctions inconnues ayant* 1, 2, ... *variables paramétriques.*

Dans un langage plus vague, on peut dire également que *les mêmes intégrales renferment, pour chaque fonction inconnue, un paramètre indéterminé si elle n'a que des variables principales, une fonction arbitraire de ses variables paramétriques dans le cas contraire* (*cf.* 217, III).

369. La réduction à quelque système linéaire, d'un système donné qui ne l'est pas, a été ici pour nous un simple artifice de démonstration. Nous attribuons néanmoins à cette opération une portée infiniment plus grande, et voici pourquoi. Dans les cas où l'on a pu intégrer des équations différentielles partielles, sans spécifier préalablement les déterminations initiales des intégrales, on a trouvé pour résultat des *relations déterminées, finies ou différentielles, entre elles* et quelquefois avec d'autres fonctions pour ainsi dire parasites. En sorte que, si les équations différentielles totales sont des sources de nouvelles fonctions, les équations différentielles partielles sont plutôt des instruments générateurs de *relations* entre des fonctions.

Or, pour vérifier que ces relations amenées par l'intégration reconduisent bien aux équations différentielles partielles intégrées, il faut de toute nécessité les différentier, puis combiner convenablement ce qu'elles deviennent ainsi. Toute différentiation introduisant *d'une manière essentiellement linéaire* les nouvelles dérivées auxquelles elle donne naissance, on voit que

des équations linéaires se présentent toujours dans le passage des équations intégrales aux équations différentielles partielles proposées. Il en résulte que, dans l'intégration qui est l'opération inverse, il est plausible de ne pas changer de route et par conséquent de se diriger d'abord vers des équations linéaires pour de là essayer d'atteindre les équations intégrales. La justesse de cette assertion ressortira de la manière dont nous exposerons, dans notre troisième Partie, la méthode de Cauchy pour intégrer des équations aux dérivées partielles du premier ordre, non linéaires.

Impossibilité éventuelle de trouver à un système immédiat et passif mais irrégulier, des intégrales répondant à des déterminations initiales arbitraires.

370. Un système immédiat et linéaire quelconque étant donné, on peut toujours, en procédant comme au n° **362**, construire avec les fonctions $\bar{\mathfrak{u}}$, $\bar{\mathfrak{v}}$, ... un système linéaire semblable qui ait en apparence la faculté de devenir majorant. Mais, s'il est irrégulier, cette faculté peut être illusoire; effectivement, en remplaçant les formules (23), (25) du numéro cité par les substitutions bien plus générales

$$\left\{\begin{array}{l} \mathfrak{x} = x_0 + \alpha_1(x - x_0), \\ \mathfrak{y} = y_0 + \alpha_2(y - y_0), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} U = u_0 + \dfrac{1}{\beta_1}(\bar{\mathfrak{u}} - u_0), \\ V = v_0 + \dfrac{1}{\beta_2}(\bar{\mathfrak{v}} - v_0), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \end{array}\right.$$

les constantes qui multiplient la fonction ω dans le second membre de l'équation (28) deviennent

$$\frac{\alpha_i}{\beta_j}\mu, \quad \dots, \quad \frac{\beta_{j'}}{\alpha_{i'}}\frac{\alpha_i}{\beta_j}\mathfrak{m}, \quad \dots$$

et, à cause de la petitesse des quantités ..., $\mathfrak{m}$, ... dont la somme ne peut dans chaque équation différentielle surpasser $\varepsilon < 1$, on ne

peut pas, malgré le nombre bien plus grand des indéterminées $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_g$, rendre supérieures à une quantité positive quelconque *toutes ces constantes à la fois*. Si l'on cherche à en augmenter quelques-unes, les autres diminuent forcément.

Quand les limites supérieures des modules des coefficients des dérivées paramétriques dans les seconds membres du système linéaire irrégulier proposé sont assez petites, ceci n'empêche pas à la vérité de rendre encore majorant le système auxiliaire, par un choix convenable des indéterminées ci-dessus. *Mais le théorème du* n° 364 *qui s'applique à tous les systèmes linéaires réguliers cesse d'exister pour ceux qui sont irréguliers.*

On constate sans peine que la transformation du n° 365, appliquée à un système non linéaire irrégulier, ne peut jamais conduire qu'à un système linéaire, irrégulier aussi. Il en résulte donc que le théorème du n° 366 n'est pas applicable non plus aux systèmes non linéaires irréguliers, et qu'ainsi *l'existence de leurs intégrales répondant à des conditions initiales quelconques est incertaine.*

Il y a effectivement des systèmes de cette espèce qui sont absolument dépourvus de pareilles intégrales, bien qu'ils remplissent toutes les conditions du théorème du n° 366, et aussi de celui du n° 364 rentrant dans l'autre. L'exemple très simple que nous allons traiter en fournira une preuve suffisante.

371. En appelant H_u, H_v deux constantes réelles positives, nous considérerons le système

(1)

$\frac{du}{dx} = v + H_u \frac{du}{dy}$	
	$\frac{dv}{dy} = u + H_v \frac{dv}{dx}$

qui est évidemment immédiat, passif et linéaire, mais irrégulier, et nous lui adjoindrons les conditions initiales

$$u = y \text{ pour } x = 0, \qquad v = x \text{ pour } y = 0. \tag{2}$$

Le système auxiliaire semblable est ici

$$(3)\qquad \begin{array}{|c|c|} \hline \dfrac{dU}{dx} = \dfrac{\alpha_1}{\beta_1}\mu.\omega + \dfrac{\alpha_1}{\beta_1}\dfrac{\beta_1}{\alpha_2}\varepsilon.\omega.\dfrac{dU}{dy} & \\ \hline & \dfrac{dV}{dy} = \dfrac{\alpha_2}{\beta_2}\mu.\omega + \dfrac{\alpha_2}{\beta_2}\dfrac{\beta_2}{\alpha_1}\varepsilon.\omega.\dfrac{dV}{dx} \\ \hline \end{array}$$

et, pour qu'il soit majorant, il faut qu'on ait en particulier

$$(4)\qquad \varepsilon\frac{\alpha_1}{\alpha_2} > H_u, \quad \varepsilon\frac{\alpha_2}{\alpha_1} > H_v,$$

c'est-à-dire

$$\frac{H_u}{\varepsilon} < \frac{\alpha_1}{\alpha_2} < \frac{\varepsilon}{H_v},$$

d'où

$$H_u H_v < \varepsilon^2 < 1,$$

à cause de la condition essentielle $\varepsilon < 1$. Si l'on a $H_u H_v < 1$, on pourra donc satisfaire aux inégalités (4) par une infinité de valeurs de $\varepsilon (< 1)$, α_1, α_2; après quoi, il est facile de voir que les autres indéterminées β_1, β_2, μ, γ, η peuvent être choisies, et cela d'une infinité de manières encore, dans des conditions de nature à rendre le système auxiliaire (3) majorant pour le proposé (1), relativement soit aux déterminations initiales (2), soit même à toutes autres (olotropes en $y = 0$ et $x = 0$) qu'on voudra. Le théorème (**366**) [ou (**364**)] reste alors applicable, et, *quoique irrégulier, le système proposé* (1) *possède encore des intégrales ayant des déterminations initiales arbitraires.*

372. Mais si l'on a $H_u H_v > 1$, le système auxiliaire (3) ne peut plus être rendu majorant, et en supposant, pour plus de simplicité,

$$H_u = H_v = H > 1,$$

nous allons effectivement prouver qu'*il ne peut avoir aucun groupe d'intégrales satisfaisant aux conditions initiales* (2).

I. Il est évident, par la nature spéciale du système considéré (1)

et des déterminations initiales (2), que, *quels que soient* p, q,

(5) $$u_{p,q},\quad v_{p,q},$$

valeurs initiales de

$$\frac{d^{p+q}u}{dx^p\,dy^q},\quad \frac{d^{p+q}v}{dx^p\,dy^q}$$

tirées des formules ultimes, sont des polynômes entiers en H, *ayant pour coefficients des entiers positifs, et qu'on a*

$$u_{p,q} = v_{q,p},$$

par suite,

$$\delta_{p,q} = \theta_{q,p},$$

$\delta_{p,q}$, $\theta_{p,q}$ *désignant les degrés effectifs, par rapport à* H, *des polynômes* (5).

II. *Quel que soit l'indice* m, *on a d'abord*

(6) $$\delta_{1,m-1} \geqq \delta_{m-1,0}.$$

Car la différentiation $\frac{d^{m-1}}{dy^{m-1}}$, exécutée sur l'équation de la première colonne du système proposé, donne la formule primitive

$$\frac{d^m u}{dx\,dy^{m-1}} = \frac{d^{m-1}v}{dy^{m-1}} + \mathrm{H}\,\frac{d^m u}{dy^m},$$

d'où, pour $x = y = 0$, la formule ultime

$$u_{1,m-1} = \ldots + v_{0,m-1} + \ldots = \ldots + u_{m-1,0} + \ldots \quad (\mathrm{I}).$$

III. *On a ensuite*

(7) $$\delta_{m,0} \geqq \delta_{1,m-1} + m - 1.$$

Car la différentiation $\frac{d^{m-1}}{dx^{p-1}\,dy^{m-p}}$, exécutée sur la même équation différentielle, donne, pour $x = y = 0$,

$$u_{p,m-p} = \ldots + \mathrm{H}\,u_{p-1,m-p+1},$$

d'où

$$\delta_{p,m-p} \geqq \delta_{p-1,m-p+1} + 1.$$

Or, en donnant successivement à p les valeurs m, $m-1$, ...

3, 2, et ajoutant membre à membre les inégalités correspondantes fournies par la précédente, on parvient bien à l'inégalité (7).

IV. *On a encore*

$$\delta_{m,0} \geqq \frac{m(m-1)}{2} + 1. \tag{8}$$

La combinaison des relations (6), (7) donne

$$\delta_{m,0} \geqq \delta_{m-1,0} + m - 1.$$

Or, en ajoutant membre à membre cette inégalité avec celles s'en déduisant par la substitution successive de $m-1$, $m-2$, ..., 2 à m, et en observant qu'on a $\delta_{1,0} = 1$ à cause de $u_{1,0} = H$, on obtient précisément l'inégalité (8).

V. En vertu de la première remarque, faite dans l'alinéa (I), de l'inégalité (8), et à cause de $H > 1$, on a

$$u_{m,0} \geqq H^{\frac{m(m-1)}{2}+1}.$$

En appelant donc ξ le module de x, le terme général de la partie du développement de l'intégrale hypothétique u qui est indépendante de y a un module au moins égal à

$$H^{\frac{m(m-1)}{2}+1} \frac{\xi^m}{1.2\ldots m}.$$

Or, cette quantité croît indéfiniment avec m pour toute valeur de ξ non $= 0$; car le rapport de ses deux valeurs où l'exposant de ξ a les valeurs $m+1$, m, est

$$\frac{H^m}{m+1} \xi,$$

quantité évidemment infinie avec m, à cause de $H > 1$.

Donc cette partie du développement de u est une série divergente, le développement tout entier aussi, et, comme nous l'avons annoncé, les intégrales u, v ne sauraient exister.

On arriverait à plus forte raison à la même conclusion, en sub-

stituant aux déterminations initiales (2)

$$u = \upsilon(y) \quad \text{pour} \quad x = 0, \qquad v = \varphi(x) \quad \text{pour} \quad y = 0,$$

υ, φ désignant des fonctions quelconques, toutes positives elles et leurs dérivées de tous ordres, pour $x = 0$ et $y = 0$.

373. Ainsi donc, *pour un système irrégulier, même immédiat et passif, l'existence des intégrales ordinaires ayant des déterminations initiales données, est essentiellement précaire.*

Elle dépend de la nature des composantes des seconds membres des équations différentielles, et aussi de celle des déterminations initiales, les intégrales d'un système de même Tableau pouvant exister dans un cas et disparaître dans un autre. Il n'entre pas dans notre cadre d'approfondir davantage cette aride question, à laquelle d'ailleurs nous n'apercevons dans l'état actuel de l'Analyse aucune application intéressante.

Nous ferons cependant cette remarque à peu près évidente et qui peut être utile : *Un système irrégulier, mais immédiat et passif, jouit, au point de vue de l'existence des intégrales ordinaires, des mêmes propriétés que s'il était régulier, quand on peut le déduire d'un système de ce genre et de plus régulier, par la simple suppression de quelques équations différentielles.*

Par exemple, en supprimant telles équations qu'on voudra dans un système immédiat d'équations différentielles totales, on obtient un système partiel évidemment immédiat aussi, mais qui peut être irrégulier. *Si ce nouveau système est passif, le théorème du n°* 366 *lui est certainement applicable.*

374. Il est essentiel de noter que, si un système irrégulier est quelquefois privé d'intégrales répondant à certaines conditions initiales, *il n'en résulte pas que son intégration soit impossible.* Car, en le résolvant par rapport à certaines dérivées paramétriques, quelques variables indépendantes changent de nom pour certaines fonctions, la répartition des cases vides et des cases occupées se modifie dans son Tableau, et, d'irrégulier qu'il était, il peut devenir régulier, par suite sujet au théorème du n° 366 qui lui assure des intégrales, indépendamment des conditions initiales qui peuvent leur être imposées. Mais si, dans

leur ensemble, les équations différentielles sont restées les mêmes, ou du moins équivalentes à ce qu'elles étaient primitivement, *l'économie des conditions initiales a été totalement bouleversée par les changements que cette transformation a opérés dans la dénomination des diverses variables par rapport à chacune des fonctions inconnues.* Et le paradoxe naissant de la coexistence de ces deux faits en apparence contradictoires, que, sous une forme, le système proposé n'a pas d'intégrales, tandis qu'il en possède sous une autre, se résout sans difficulté par cette simple remarque que *les deux groupes de conditions initiales correspondant à ces deux formes ne sont pas du tout équivalents.*

Par exemple, sous la forme équivalente

$\frac{du}{dx} = v + H_u \frac{du}{dy}$	$\frac{dv}{dx} = -\frac{u}{H_v} + \frac{1}{H_v}\frac{dv}{dy}$

le système (1), même pour $H_u = H_v = H > 1$, peut être intégré avec les conditions initiales quelconques

$$\left.\begin{array}{l} u = \upsilon(y) \\ v = \varphi(y) \end{array}\right\} \text{pour } x = x_0;$$

mais il est impossible de choisir les fonctions υ, φ, de manière que les intégrales correspondantes se réduisent simultanément : la première pour $x = 0$ à une fonction de y positive avec toutes ses dérivées en $y = 0$, la seconde pour $y = 0$ à une fonction de x jouissant des mêmes propriétés en $x = 0$.

Indication sommaire de la marche générale à suivre pour découvrir toutes les solutions d'un système donné quelconque d'équations différentielles et finies.

375. Les systèmes immédiats d'équations différentielles totales ou partielles sont les seuls dont la considération générale puisse conduire à des résultats précis et susceptibles de coordination

théorique ; et nous ferons incessamment une étude approfondie de ceux qui sont à la fois les plus importants et les plus facilement maniables. Mais, auparavant, il convient de montrer en gros que *la recherche des solutions de toutes natures d'un système donné quelconque d'équations tant différentielles que finies revient toujours en dernière analyse à celle des intégrales ordinaires de quelque système immédiat,* et d'esquisser les traits principaux de cette réduction. Nous allégerons ainsi nos théories ultérieures de considérations assez diffuses qui les embarrasseraient sensiblement, qu'il faut cependant exposer, et qui gagnent certainement à être rapprochées les unes des autres.

376. Supposons-nous donc en présence d'un système

$$(1) \qquad [\mathfrak{S}]$$

composé d'équations différentielles et finies entre certaines fonctions inconnues d'un même groupe de variables indépendantes x, y, ..., équations dont les composantes des premiers membres sont de natures quelconques, mais cependant toutes olotropes, pour les valeurs à considérer, des quantités qu'elles contiennent.

I. On commencera par *discuter conformément aux règles résumées au* n° 319 *le groupe des équations finies*

$$(2) \qquad [\mathfrak{f}]$$

qui peuvent faire partie du système proposé. Si, à lui seul, ce système partiel est impossible, il est clair que le proposé n'a point de solutions non plus. Sinon (*loc. cit.*) *on remplacera le groupe dont il s'agit par un groupe équivalent mais réduit*

$$(3) \qquad [\mathfrak{f}_1].$$

II. En appliquant ensuite la méthode exposée au n° 285, *on ramènera à un groupe équivalent du premier ordre*

$$(4) \qquad [\mathfrak{D}]$$

celui des équations vraiment différentielles du système proposé dont nous appellerons u, v, ... les fonctions inconnues.

III. *Des équations du groupe* (4) *on éliminera de toutes les manières possibles les dérivées seulement* u', v', ... *des fonctions inconnues, de manière à le décomposer en un sous-groupe*

$$(5) \qquad [\mathfrak{d}]$$

d'équations vraiment différentielles résolubles par rapport à un nombre égal des dérivées u', v', ..., *et un autre sous-groupe d'équations toutes finies dont la réunion aux équations* (3) *fournira un nouveau système fini*

$$[\mathfrak{f}_2],$$

qui sera traité comme l'a été (2).

Sauf impossibilité révélée par cette discussion, le système proposé (1) *sera ainsi ramené à se composer des équations différentielles* (5) *accompagnées d'équations finies*

$$(6) \qquad [\mathfrak{f}]$$

résolubles par rapport à un nombre égal de fonctions inconnues u, v, ...

IV. La résolution des équations (6) fournira certaines fonctions inconnues u, w, ... exprimées en fonctions composées finies des autres v, s, ... et de x, y, ... par des formules

$$u = \mathrm{U}(x, y, \ldots, v, s, \ldots), \qquad w = \mathrm{W}(x, y, \ldots, v, s, \ldots), \qquad \ldots.$$

dont la différentiation fournira toutes les dérivées premières de u, w, ... exprimées aussi en fonctions composées différentielles de premier ordre de v, s, ...

On portera ces diverses expressions finies et différentielles dans les équations (5), *ce qui les transformera en d'autres également différentielles du premier ordre, mais intéressant seulement les fonctions inconnues* v, s, ... *par rapport auxquelles le groupe n'a pas été résolu.*

Ces nouvelles équations seront traitées par la méthode expliquée à l'alinéa III, puis, s'il y a lieu, par celle du présent; et ainsi de suite.

V. Le nombre total des équations du système ne va jamais en augmentant, puisqu'on en rejette quelquefois sans jamais en ajouter; il en est de même pour celui des équations vraiment différentielles seulement, puisque jamais non plus on n'y en introduit de nouvelles et que parfois au contraire on en déduit des équations finies qui sont transportées dans l'autre groupe.

En procédant de la sorte aussi longtemps qu'il le faudra, on finira donc certainement, sauf toujours la rencontre de quelque impossibilité dans le système des équations finies, par tomber sur l'un des trois cas suivants :

(A). *Un système final*

$$[F]$$

composé d'équations toutes finies et résolubles par rapport à des fonctions inconnues en nombre égal.

(B). *Un système final*

$$[D]$$

d'équations différentielles pures (du premier ordre) résolubles par rapport à un nombre égal de dérivées des fonctions inconnues.

(C). *Un système final mixte*

$$\begin{cases} [F] \\ [D] \end{cases}$$

composé de deux systèmes partiels, l'un fini [F], *l'autre* [D] *purement différentiel, chacun de la nature de ceux des cas* (A) (B) *ci-dessus et jouissant en outre de la propriété relative de ne pas souffrir la réduction de l'alinéa* IV.

Cela posé, voici comment les choses se passeront.

(A). *La résolution du système fini* [F] *opérée conformément aux règles du* n° 319 *fournira toutes les solutions du système originairement proposé* (1). *Selon les circonstances il y aura détermination ou indétermination, le nombre des groupes de solutions distinctes pouvant d'ailleurs être quelconque.*

(B). *On résoudra le système* [D] *par rapport à des dérivées*

des fonctions inconnues, choisies de manière que chaque groupe de formules de résolution constitue un système immédiat et régulier d'équations différentielles partielles ou totales. Les intégrales de ces divers systèmes immédiats (**380**, *inf.*) *sont évidemment celles du proposé* (1).

(C). *Des équations finies* [F] *on tirera pareil nombre de fonctions inconnues* u, w, ... *en fonctions composées tant des autres* v, s, ... *que de* x, y, ..., *et la différentiation des formules ainsi obtenues*

$$(7)\quad u = U(x, y, \ldots, v, s, \ldots), \qquad w = W(x, y, \ldots, v, s, \ldots), \qquad \ldots$$

(*dont les groupes peuvent être multiples*) *fournira toutes les dérivées premières, de* u, w, ... *en fonctions composées différentielles de* v, s, *du premier ordre par rapport aux dérivées de ces dernières fonctions.*

La substitution de ces expressions finies et des expressions différentielles correspondantes dans les équations [D] *les change en un système du premier ordre*

$$[d]$$

qui maintenant contient seulement les fonctions inconnues v, s, ... *à l'exclusion de* u, w, ...

Les intégrales de ce dernier système [d], *obtenues en suivant la marche propre au cas* (B), *et combinées avec les valeurs correspondantes de* u, v, ... *fournies par les formules* (7), *seront des solutions du système proposé* (1).

Les autres solutions s'obtiendront évidemment en traitant de la même manière les autres racines analogues à (7) *que le système fini* [F] *peut encore posséder.*

377. Ainsi donc, si les opérations expliquées ci-dessus n'ont pas résolu la question, négativement par la rencontre d'un système fini impossible, affirmativement par la disparition de toute équation différentielle laissant un système fini dont la résolution fournit toutes les fonctions pouvant satisfaire au système proposé (1), on est conduit à quelque système immédiat et régulier,

comme dans les cas (B), (C) ci-dessus. *Il faut d'abord en chercher les intégrales ordinaires.*

A cet effet on formera les conditions de passivité. *S'il n'y en a point à considérer (cas de* 0 *ou* 1 *variable principale pour chaque fonction inconnue), ou bien si elles sont toutes satisfaites, les seules intégrales ordinaires sont celles dont les théorèmes des* n°s 301, 366 *assurent l'existence.* Elles renferment des éléments d'indétermination dont l'étendue est mesurée par celle totale des suites infinies des coefficients indéterminés des développements de leurs déterminations initiales (368). Elle est la moindre quand le système final est composé d'équations différentielles totales, cas auquel le nombre des coefficients indéterminés se réduit au nombre même des fonctions inconnues de ce système (303).

Dans le cas (C) ci-dessus, ces éléments d'indétermination, quelle que soit leur importance, s'introduisent aussi dans le groupe partiel de solutions que fournissent les formules (7) et subsistent par suite dans l'ensemble de celles du système originaire proposé (1).

378. *Quand des conditions de passivité ne sont pas remplies identiquement, elles constituent, entre les intégrales du système différentiel final, de nouvelles relations auxquelles ces fonctions doivent forcément satisfaire,* puisque les conditions dont il s'agit sont des conséquences nécessaires de l'existence de fonctions satisfaisant aux équations différentielles dont elles proviennent.

On adjoindra donc au système différentiel final les conditions non satisfaites (tantôt finies, tantôt différentielles). Puis on recommencera toute la série des opérations expliquées en détail, du n° 376 *à celui-ci, et cela indéfiniment, jusqu'à ce qu'on arrive soit à une impossibilité, soit à l'un des cas examinés dans le numéro précédent, mais où les équations différentielles, s'il en reste, puissent être transformées en un système immédiat et régulier qui soit en même temps passif.*

Les intégrales de ce système conduisent évidemment aux solutions du proposé (1).

379. *Il reste encore à chercher les intégrales singulières que peut posséder le système final différentiel et immédiat* dont nous parlions au n° 377.

A cet effet on considérera les ensembles de valeurs qui sont singulières (144) pour tout ou partie des composantes des seconds membres des équations de ce système, ensembles dont la connaissance dérive de celle de ces composantes elles-mêmes.

Habituellement (*loc. cit.*) chacun de ces ensembles est caractérisé par la propriété des valeurs qui en font partie, de satisfaire à un certain groupe d'équations finies dont le nombre et l'espèce dépendent de la nature spéciale des seconds membres donnés.

En écrivant dans ce groupe d'équations chaque variable indépendante du système final dont on cherche les intégrales singulières, ou chaque fonction inconnue, ou chaque dérivée d'une fonction inconnue, à la place de la valeur qui lui appartient, il se transforme évidemment en un système additionnel de relations (finies ou différentielles) auxquelles doivent satisfaire les intégrales singulières cherchées (288) (339). *On adjoindra donc ce système additionnel, à celui dont on veut découvrir les intégrales singulières, et la recherche de ces dernières sera ainsi ramenée à celle des intégrales de toutes sortes que le système ainsi accru peut posséder.*

Dans tous les cas connus, ce nouveau système est de nature à comporter une impossibilité manifeste ou sinon à se prêter à la suite d'opérations expliquées aux n°s 376 *et suivants.* Hors ce cas d'impossibilité, ces opérations, recommencées s'il y a lieu plusieurs fois, conduiront certainement, ou bien à la constatation d'une impossibilité, ou bien à des équations dont les racines si elles sont finies, dont les intégrales ordinaires si elles sont différentielles, seront les intégrales singulières cherchées.

380. La question que nous venons de traiter par aperçu est d'une nature si vague, que nous ne pourrions rien dire de plus précis sans entrer dans des particularités où les considérations précédentes perdraient tout intérêt général. Nous ne parlerons pas non plus des modifications avantageuses dont la méthode que nous avons exposée est quelquefois susceptible; mais nous devons ajouter quelques mots sur les résultats éventuels de notre dis-

cussion appliquée à un système immédiat et régulier quelconque

$$(8) \qquad [IR]$$

d'équations différentielles entre les fonctions inconnues $u, v, \ldots$ des variables indépendantes $x, y, \ldots$. Ce cas est particulièrement intéressant parce qu'il est plus simple et parce que tous les autres s'y ramènent en dernière analyse, comme nous l'avons vu, quand ils ne conduisent pas exclusivement à des équations finies sur lesquelles nous n'avons rien à ajouter à ce qui en a été dit dans le Chapitre XI.

I. *Quand le nombre des variables principales est* 0 *ou* 1 *pour chaque fonction inconnue, l'existence des intégrales ordinaires est certaine.*

II. Quand il est plus considérable, il y a à se préoccuper des conditions de passivité.

Si elles sont toutes satisfaites, les choses se passent comme dans le cas précédent (I) *et l'étendue des éléments d'indétermination des intégrales est immédiatement réglée par l'importance totale de leurs groupes de variables paramétriques.* Ici et ci-dessus (I) on peut dire que les intégrales ordinaires sont *normales*.

III. *Sinon, la méthode esquissée au* n° 378 *exige absolument l'adjonction de nouvelles équations au système proposé* (8). La suite des opérations mentionnées aux n°s 376 et suivants peut conduire à en adjoindre d'autres encore, cela même à plusieurs reprises. *On peut donc finir par se trouver en présence d'une impossibilité; c'est même la chose la plus probable.* Effectivement, l'augmentation indéfinie du nombre des équations additionnelles ne peut être arrêtée que par la passivité de l'un des systèmes immédiats que ramène le cours des opérations, c'est-à-dire que par un événement *absolument fortuit,* puisque sa réalisation exige, non pas que certaines conditions positives ne soient pas remplies, mais au contraire qu'elles le soient.

Dans le cas de non-passivité, l'existence des intégrales ordinaires est donc essentiellement précaire, et même, s'il y en a, elles se distinguent des intégrales normales (I) (II) *par cette*

circonstance capitale, que l'étendue de leurs éléments d'indétermination n'est nullement réglée par les nombres de variables paramétriques existant pour les diverses fonctions inconnues du système proposé (8). *Elle est toujours moindre que si le système était passif,* parce que les équations à lui adjoindre pour opérer diminuent forcément le nombre des variables paramétriques dans le système final.

A cause de tout cela, et par opposition aux intégrales ordinaires normales des cas de passivité, nous donnons à celles-ci le nom d'intégrales *exceptionnelles* (297).

IV. Comme la recherche des intégrales ordinaires exceptionnelles, celle des intégrales singulières exige toujours l'adjonction au système proposé de nouvelles équations (379) dont, pour les mêmes raisons, le nombre peut s'accroître jusqu'à impossibilité. *L'existence des intégrales singulières est donc encore précaire, et jamais non plus, quand il y en a, elles ne comportent des éléments d'indétermination aussi étendus que ceux des intégrales ordinaires normales d'un système passif.*

En résumé, si le système (8) est passif, il possède certainement des intégrales ordinaires normales; avec elles, il peut avoir encore des intégrales singulières, mais c'est par hasard.

S'il est non passif, l'existence d'intégrales ordinaires exceptionnelles, comme celle d'intégrales singulières, est toujours fortuite.

Les intégrales ordinaires normales sont de beaucoup les plus intéressantes; nous allons les étudier dans les systèmes d'équations différentielles totales, et, chemin faisant, nous donnerons des exemples d'intégrales ordinaires exceptionnelles et d'intégrales singulières (405, 406, *inf.*).



CHAPITRE XIII.

ÉTUDE ULTÉRIEURE DES SYSTÈMES IMMÉDIATS D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES TOTALES.

Fonctions intégrales générales.

381. Le système immédiat d'équations différentielles totales

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{du}{dx} = U_x(x, y, \ldots, u, v, \ldots), & \dfrac{dv}{dx} = V_x, \quad \ldots, \\ \dfrac{du}{dy} = U_y(x, y, \ldots, u, v, \ldots), & \dfrac{dv}{dy} = V_y, \quad \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \end{cases}$$

aux g fonctions inconnues

$$u, \ v, \ \ldots$$

des h variables indépendantes

$$x, \ y, \ \ldots,$$

dont les seconds membres sont formés avec des composantes demeurant olotropes pour toutes les valeurs de ces quantités qui tombent dans les aires limitées

$$(2)\qquad S_u, \ S_v, \ \ldots,$$

$$(3)\qquad S_x, \ S_y, \ \ldots,$$

étant supposé *passif, ce que nous ferons essentiellement jusqu'à mention contraire,* nous avons établi dans le Chapitre X ces trois points fondamentaux dont les derniers sont de simples corollaires du premier.

I. *Les valeurs initiales*

(4) $$u_0, \ v_0, \ \ldots,$$

(5) $$x_0, \ y_0, \ \ldots$$

ayant été choisies à volonté dans les aires (2), (3), *il existe un groupe unique de séries entières en* $(x-x_0)$, $(y-y_0)$, ..., *aux rayons de convergence desquelles on peut assigner pour limites inférieures des quantités absolument indépendantes des positions des points* (4), (5) *dans les aires en question, jouissant de la double propriété que leurs sommes satisfont aux équations* (1) *et prennent les valeurs* (4) *pour*

$$x = x_0, \quad y = y_0, \quad \ldots.$$

II. *Ces premiers développements peuvent ensuite être recommencés par cheminement, au moins dans toutes portions des aires* (3), *où la marche de l'opération n'expose pas les sommes des séries à sortir des aires* (2).

III. En faisant donc varier, dans les aires données et de toutes les manières permises, le tracé des chemins et les valeurs des quantités initiales, on obtient toutes les intégrales ordinaires qui appartiennent aux équations proposées dans les limites considérées.

C'est l'ensemble de ces intégrales dont nous allons maintenant poursuivre l'étude; elles se présentent ainsi sous la forme de ce que nous avons appelé des *pseudo-fonctions oloïdes,* dans le dernier paragraphe du Chapitre VI. Une décomposition convenable des aires où on les considère en fait de véritables fonctions olotropes qui sont douées de propriétés susceptibles d'énoncés précis, de démonstrations rigoureuses, et qu'il suffit ensuite de relier les unes aux autres par voie de cheminement pour apercevoir tout ce qui se passe. On ne peut se dispenser de procéder ainsi quand on se trouve en présence d'un cas particulier à discuter complètement; mais pour le faire sans descendre des généralités, il faudrait formuler mille restrictions embarrassantes et donner aux énoncés une forme parfois inaccoutumée. Nous simplifierons donc beaucoup notre exposition en sacrifiant un peu de précision dans la forme,

ce qui d'ailleurs n'a pas au fond de bien sensibles inconvénients. En particulier, nous laisserons le nom de *fonctions olotropes* à des développements raccordés qui peuvent n'être que des pseudo-fonctions, et nous n'insisterons pas sur la détermination exacte des limites entre lesquelles nos conclusions seront valables.

382. Nous répétons que *deux groupes d'intégrales sont identiques, quand ils correspondent aux mêmes données initiales* (**302**, III).

383. *Toutes les intégrales ordinaires des équations* (1) *sont données par des formules de la forme*

$$(6)\qquad \begin{cases} u = \upsilon(x, y, \ldots, C_1, C_2, \ldots, C_g), \\ v = \varphi(x, y, \ldots, C_1, C_2, \ldots, C_g), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

où les g fonctions υ, φ, ... *renferment, outre* x, y, ..., *les g nouvelles variables ou constantes arbitraires* C_1, C_2, ..., C_g (**209**, IV), *et jouissent des deux propriétés suivantes :*

Elles sont olotropes aussi longtemps que x, y, ... *restent dans les aires* (3) *et que les valeurs attribuées simultanément aux constantes arbitraires maintiennent les leurs dans les aires* (2).

Pour toutes ces valeurs de $x, y, \ldots, C_1, \ldots, C_g$, *leur déterminant différentiel pris par rapport à* C_1, C_2, ... C_g (**306**) *reste essentiellement différent de zéro.*

I. Soient x_0, y_0, ... des valeurs particulières des variables choisies arbitrairement, mais une fois pour toutes, dans les aires (3), et $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, ..., g nouvelles variables indépendantes dont nous assujettirons les valeurs à rester à l'intérieur d'aires

$$(7)\qquad S_{\mathfrak{u}},\quad S_{\mathfrak{v}},\quad \ldots$$

égales à (2), c'est-à-dire qui coïncideraient exactement avec ces dernières, si l'on superposait à O_u, O_v, ... les nouveaux axes et origines $O_{\mathfrak{u}}$, $O_{\mathfrak{v}}$, ..., et considérons les intégrales du système

proposé qui sont déterminées par les conditions initiales

$$(8)\qquad u = \mathfrak{u},\quad v = \mathfrak{v},\quad \ldots,\quad \text{pour}\quad \begin{cases} x = x_0, \\ y = y_0, \\ \ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Ces fonctions satisfont évidemment au système immédiat d'équations différentielles partielles (ϖ), aux h variables principales x, y, ..., aux g variables paramétriques $\mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \ldots$, dont on écrirait le Tableau en prolongeant celui du proposé, et par le bas, de g lignes correspondant à $\mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \ldots$ mais ne contenant que des cases vides; et, envisagées à ce point de vue, les conditions (8) réduisent leurs déterminations initiales aux variables paramétriques elles-mêmes $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}, \ldots$, c'est-à-dire à des fonctions indéfiniment olotropes.

Comme, en fait, le système (ϖ) est identique au proposé, et qu'au nouveau point de vue d'où nous l'envisageons, ses équations ne contiennent ni variables, ni dérivées paramétriques, les composantes de ses seconds membres sont olotropes pour toutes valeurs de $x, y, \ldots, u, v, \ldots$ tombant dans les aires (3), (2), et pour toutes les valeurs imaginables de $\mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \ldots$; il est passif pour les mêmes raisons, de plus régulier, même linéaire. En vertu du théorème du n° 366, ses intégrales

$$(9)\qquad \begin{cases} u = \upsilon_0(x, y, \ldots, \mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \ldots), \\ v = \varphi_0(x, y, \ldots, \mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \ldots), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

demeurent olotropes aussi longtemps que les valeurs de $x, y, \ldots$, $\mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \ldots$ restent à l'intérieur des aires (3), (7) et font rester celles correspondantes de $u, v, \ldots$ à l'intérieur des aires (2).

En d'autres termes, et en considérant maintenant le système proposé comme aux différentielles totales : *celles de ses intégrales qui sont déterminées par les valeurs initiales fixes* $x_0, y_0, \ldots$ *et variables* $\mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \ldots$ *sont les fonctions* (9) *de* $x, y, \ldots$ *et de ces quantités* $\mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \ldots$ *jouant maintenant le rôle de constantes arbitraires, qui jouissent de la première propriété énoncée.*

II. *Pour les valeurs de* $x, y, \ldots, \mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \ldots$ *ci-dessus définies, le déterminant différentiel des fonctions* (9) *par rapport à* $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}, \ldots$, *ne peut s'évanouir.*

Ce point est évident quand $x = x_0, y = y_0, \ldots$, car les conditions (8) donnent

$$\upsilon_0(x_0, y_0, \ldots, \mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \ldots) = \mathfrak{u}, \qquad \varphi_0(x_0, y_0, \ldots, \mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \ldots = \mathfrak{v}, \qquad \ldots$$

et ce déterminant se réduit à

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 1 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 1 & \ldots \\ . & \ldots & & \ldots \end{vmatrix} = 1;$$

il reste ainsi à prouver qu'il est vrai pour d'autres valeurs x_1, y_1, ... des mêmes variables.

Posons à cet effet

$$(10) \qquad \begin{cases} \upsilon_0(x_1, y_1, \ldots, \mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \ldots) = \mathfrak{u}', \\ \varphi_0(x_1, y_1, \ldots, \mathfrak{u}. \mathfrak{v}, \ldots) = \mathfrak{v}', \\ \ldots\ldots \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

et appelons

$$\begin{gathered} \upsilon_1(x, y, \ldots, \mathfrak{u}', \mathfrak{v}', \ldots), \\ \varphi_1(x, y, \ldots, \mathfrak{u}', \mathfrak{v}', \ldots), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{gathered}$$

les intégrales du système proposé qui se réduisent à $\mathfrak{u}'$, $\mathfrak{v}'$, ... en $x_1, y_1, \ldots$. En vertu de l'observation générale du n° **382**, ces fonctions sont nécessairement identiques aux intégrales (9), puisque les unes et les autres satisfont aux mêmes équations différentielles (1) et que pour

$$x = x_1, \qquad y = y_1, \qquad \ldots$$

elles prennent les mêmes valeurs initiales (10). Elles se réduisent donc comme elles à $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, ... pour $x = x_0, y = y_0, \ldots$.

En d'autres termes, les fonctions composées de $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, ... qu'on obtient en substituant les premiers membres des formules (10) à $\mathfrak{u}'$, $\mathfrak{v}'$, ... dans les composantes

$$(11) \qquad \begin{cases} \upsilon_1(x_0, y_0, \ldots, \mathfrak{u}', \mathfrak{v}', \ldots), \\ \varphi_1(x_0, y_0, \ldots, \mathfrak{u}', \mathfrak{v}', \ldots), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

se réduisent respectivement à

$$\mathfrak{u},$$
$$\mathfrak{v},$$
$$\vdots$$

En prenant donc les déterminants différentiels par rapport à $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, ..., et ayant égard au théorème du n° 306 *bis,* il vient facilement

$$\Delta'_0 \Delta_1 = 1,$$

où Δ'_0 désigne le déterminant des fonctions (11) par rapport à $\mathfrak{u}'$, $\mathfrak{v}'$, ..., et Δ_1 celui des fonctions (10) que nous avons en vue. Ce dernier ne peut donc être nul, puisque ainsi son produit par Δ'_0 ne l'est pas.

III. Pour donner aux formules (9) la forme plus générale (6) de notre énoncé, il suffit évidemment d'y opérer un simple changement partiel de variables par les formules

$$(12)\qquad \begin{cases} \mathfrak{u} = \mathfrak{U}(C_1, C_2, \ldots, C_g), \\ \mathfrak{v} = \mathfrak{V}(C_1, C_2, \ldots, C_g), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

où $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, ... forment quelque groupe de fonctions des g constantes arbitraires C_1, C_2, ..., C_g, jouissant de la propriété de rester olotropes dans certaines aires

$$S_{C_1}, \quad S_{C_2}, \quad \ldots, \quad S_{C_g},$$

d'y avoir, par rapport à C_1, C_2, ..., C_g, un déterminant différentiel toujours non $= 0$, et de n'y prendre que des valeurs tombant toutes dans les aires (7). Car ainsi le déterminant différentiel des fonctions par rapport aux constantes arbitraires ne s'évanouira jamais dans les limites considérées, puisqu'il est égal au produit de celui des fonctions (12) par celui des fonctions (9) pris par rapport à $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, ... (306 *bis*).

IV. *Non seulement, comme nous le savons actuellement, les formules* (9) *et par suite* (6) *ne donnent que des intégrales*

ordinaires de système (1), *mais encore elles les renferment toutes*.

Soit effectivement

(13) $$u(x, y, \ldots),\quad v(x, y, \ldots),\quad \ldots$$

un groupe quelconque de pareilles intégrales; il est évident que les fonctions (9) coïncideront avec elles en prenant

$$\mathfrak{u} = u(x_0, y_0, \ldots),\qquad \mathfrak{v} = v(x_0, y_0, \ldots),\qquad \ldots,$$

puisque alors ces deux groupes de fonctions auront en $x_0, y_0, \ldots$ des valeurs initiales numériquement égales chacune à chacune (**382**).

Cette conclusion est néanmoins subordonnée à la condition essentielle que *les fonctions* (13) *existent en* x_0, y_0, ..., *c'est-à-dire que le cheminement ait pu s'opérer jusque-là en partant des valeurs initiales de* x, y, ... *qui ont servi à former leurs premiers développements, sans que leurs valeurs sortent des aires* (2). Dans les cas *habituels* ces aires sont indéfinies, et cette restriction se trouve en fait inutile. C'est pourquoi nous l'avons laissée et la laisserons toujours dans l'ombre; mais il ne faut pas oublier qu'elle pourrait s'imposer.

384. Les fonctions (6), qui, par un choix convenable des valeurs numériques des constantes arbitraires, donnent toutes les intégrales ordinaires (mais non les autres), sont les *intégrales générales* du système (1). Par opposition, on nomme souvent intégrales *particulières*, tel ou tel groupe déterminé d'intégrales ordinaires, obtenu par exemple en attribuant aux constantes arbitraires telle ou telle combinaison de valeurs numériques particulières.

On fera coïncider les intégrales générales avec un groupe donné d'intégrales particulières $u(x, y, \ldots)$, $v(x, y, \ldots)$, ..., en y attribuant aux constantes arbitraires les valeurs fournies par la résolution des équations (6) dans lesquelles on donnera à $x, y, \ldots$ des valeurs particulières quelconques x', y', ..., à u, v, ... les valeurs $u(x', y', \ldots)$, $v(x', y', \ldots)$, ...; car alors les intégrales particulières considérées et celles fournies par les formules (6) seront nécessairement identiques (**382**), puisqu'en $x = x', y = y'$, ... elles prennent les unes et les autres les mêmes valeurs initiales, savoir $u(x', y', \ldots)$, $v(x', y', \ldots)$, ...

La résolution de ces équations numériques s'opère dans les conditions normales, parce que le déterminant différentiel de υ, φ, ... par rapport aux inconnues ne s'évanouit pas (307).

La forme (6) des intégrales générales déduite de la forme (9) que donne naturellement le développement en séries peut sembler artificielle et faire avec celle-ci double emploi. Nous avons dû cependant la faire connaître, parce que certains procédés d'intégration (400 *et suiv. inf.*) introduisent successivement des constantes arbitraires qui ne sont pas des valeurs simultanées des intégrales. Souvent d'ailleurs elle est plus commode.

385. Comme l'existence d'intégrales singulières ou exceptionnelles est purement fortuite (380), comme leur recherche est bien plus facile que celle des intégrales ordinaires, on s'attache avant tout à la poursuite des intégrales générales dont la découverte équivaut à peu près à l'intégration complète du système (1).

Il est bon d'observer qu'elles pourraient être mises sous telle forme où la propriété fondamentale établie ci-dessus (383, II, III) ne s'étendrait pas à toutes les valeurs accessibles à $x, y, \ldots$ et aux constantes arbitraires. Si par exemple on remplaçait C_1 par C_1^2, les formules (6) renfermeraient toujours toutes les intégrales particulières (même chaque groupe plus d'une fois), et, comme toutes les dérivées partielles de ces fonctions par rapport à C_1 s'évanouiraient toujours alors pour $C_1 = 0$ (valeur supposée accessible à cette constante), leur déterminant différentiel s'évanouirait aussi. Mais, outre qu'elles ne se présentent pas *naturellement,* les formes de cette espèce se prêtent fort mal au raisonnement, *et nous ne les considérerons jamais.*

386. Quand dans le système (1) les variables principales x, y, ... sont accompagnées de variables paramétriques $x', y', \ldots$, il y a à reproduire, à fort peu près, les observations faites aux n[os] 217 *et suiv.* pour le cas le plus simple de la question qui nous occupe.

Notre système devient alors en réalité aux différentielles partielles; il est régulier et même linéaire puisque les dérivées paramétriques des fonctions inconnues n'existent pas dans les seconds membres. Si donc les composantes des seconds membres sont des

fonctions olotropes de $x, y, \ldots, x', y', \ldots, u, v, \ldots$, si les conditions de passivité sont encore satisfaites (elles ont évidemment la même forme extérieure que si x', y', ... n'y figuraient pas), le théorème du n° 363 est applicable. *Le système considéré a donc des intégrales ordinaires ayant pour déterminations initiales telles fonctions olotropes de x', y', ... qu'il aura plu de choisir, et les développements de ces intégrales pourront être recommencés par cheminement, aussi longtemps que les valeurs de x, y, ..., x', y', ... et les valeurs correspondantes des intégrales elles-mêmes resteront dans les aires où les composantes des seconds membres sont olotropes.*

Toutes ces intégrales sont renfermées dans des *intégrales générales,* ayant la forme et les propriétés des fonctions (6), à cela près que les variables paramétriques x', y', ... y figurent explicitement à côté des principales x, y, ..., et que les lettres C_1, C_2, ..., C_g désignent maintenant, non plus des quantités indépendantes de toutes les variables, mais des fonctions arbitraires (olotropes) des seules variables paramétriques x', y', ...

Dans les circonstances courantes, cette présence de paramètres ne complique pas sensiblement l'intégration.

387. Quand il y a plus d'une variable indépendante, un fractionnement tout semblable à celui du n° **219** pour le calcul des intégrales indéfinies peut être opéré dans l'intégration des équations différentielles totales quelconques (1).

Formons deux Tableaux partiels $('\sigma)$, $(''\sigma)$, avec les lignes du Tableau (1) qui correspondent, les unes aux $'h$ variables $'x$, $'y$, ..., les autres aux $''h$ autres variables $''x$, $''y$, ... $('h + ''h = h)$. Comme les fonctions inconnues doivent en particulier satisfaire aux équations $('\sigma)$, elles sont nécessairement des formes

$$(14)\qquad \left\{\begin{array}{l} u = \varphi('x, 'y, \ldots, ''x, ''y, \ldots, ''c_1, ''c_2, \ldots, ''c_g),\\ v = \psi('x, 'y, \ldots, ''x, ''y, \ldots, ''c_1, ''c_2, \ldots, ''c_g),\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

où $''c_1$, $''c_2$, ..., $''c_g$ désignent des constantes arbitraires *par rapport aux variables principales $'x$, $'y$, ...,* c'est-à-dire *des fonctions arbitraires des variables $''x$, $''y$, ... seulement* devenues temporairement paramétriques (386).

Les expressions (14) ayant été obtenues par l'intégration du système partiel ($'\sigma$), il ne reste plus qu'à déterminer les constantes arbitraires de manière qu'elles satisfassent aussi aux équations ($''\sigma$). Leur substitution dans la première ligne de ce second système donne les g conditions

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \text{ɔ}}{\partial\, ''x} + \frac{\partial \text{ɔ}}{\partial\, ''c_1}\,\frac{d''c_1}{d''x} + \ldots = \mathrm{U}_{''x}('x,\ 'y,\ \ldots,\ ''x,\ ''y,\ \ldots,\ ''c_1,\ ''c_2,\ \ldots),\\
&\frac{\partial \varphi}{\partial\, ''x} + \frac{\partial \varphi}{\partial\, ''c_1}\,\frac{d''c_1}{d''x} + \ldots = \mathrm{V}_{''x}('x,\ \ldots),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

linéaires en

$$\frac{d''c_1}{d''x},\quad \frac{d''c_2}{d''x},\quad \ldots,\quad \frac{d''c_g}{d''x},$$

qui peuvent être résolues par rapport à ces dérivées, parce que le déterminant de leurs coefficients est précisément le déterminant différentiel des fonctions (14) par rapport à $''c_1$, $''c_2$, ..., $''c_g$, lequel reste différent de zéro aussi longtemps que ces mêmes expressions (14) représentent des intégrales ordinaires des équations ($'\sigma$) (383). Les mêmes opérations, exécutées avec les expressions dont il s'agit et les autres lignes du système ($''\sigma$) considérées successivement, conduisent à des formules qui, jointes aux précédentes, forment un système immédiat ($''\varsigma$), à g colonnes et $''h$ lignes seulement; il suffit de l'intégrer pour obtenir $''c_1$, $''c_2$, ..., $''c_g$ en fonctions de $''x$, $''y$, ... et de g constantes arbitraires véritables C_1, C_2, . ., C_g (c'est-à-dire indépendantes tant de $'x$, $'y$, ... que de $''x$, $''y$, ...). On portera ensuite ces expressions de $''c_1$, $''c_2$, ..., $''c_g$ dans les formules (14) qui donneront alors les intégrales générales du système proposé (1).

D'ailleurs *les conditions de passivité du système proposé* (1) *assurent, les unes la passivité du système* ($'\sigma$), *les autres la disparition de* $'x$, $'y$, ... *des seconds membres des équations* ($''\varsigma$), *les autres enfin la passivité de ce dernier système.* La démonstration est semblable à celle du n° **219**, sauf une plus grande complication des calculs. Nous la supprimons pour abréger.

388. On peut évidemment pousser le fractionnement jusqu'au point *de n'avoir jamais à intégrer à la fois que g équations*

différentielles entre g fonctions inconnues d'une même variable principale éventuellement accompagnée de paramètres.

On nomme équations différentielles *ordinaires* celles qui composent un système de cette sorte, et qui ne peuvent plus bénéficier de la décomposition dont il s'agit. Ce sont celles que l'on rencontre le plus souvent, et dont on s'occupe le plus volontiers à cause de leur simplicité relative. Mais, en théorie, rien ne les sépare des systèmes passifs d'équations différentielles totales à plusieurs variables principales; et nous ne gagnerions rien à les considérer exclusivement, comme on a cependant l'habitude de le faire.

Équations intégrales.

389. En conservant les notations du paragraphe précédent dont nous suivrons le numérotage jusqu'à la fin de ce Chapitre, nous allons étudier des relations finies d'une nature spéciale, entre les intégrales ordinaires du système (1) et des constantes arbitraires en nombres variés. Nous obtiendrons ainsi des résultats d'un très grand intérêt, soit en eux-mêmes, soit parce qu'ils conduisent à un fractionnement de l'intégration (**396**, *inf.*), consistant en quelque sorte à décomposer le système proposé en groupes de colonnes, au lieu de le diviser en groupes de lignes, comme nous l'avons fait ci-dessus (**387**).

Nous appellerons *équations intégrales de rang k* tout système de k ($\leqq g$) relations finies entre $x, y, \ldots, u, v, \ldots$ et k constantes arbitraires $C_1, C_2, \ldots, C_k$,

$$(15) \qquad \left\{\begin{array}{l} I_1(x, y, \ldots, u, v, \ldots, C_1, C_2, \ldots, C_k) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ I_k(x, y, \ldots, u, v, \ldots, C_1, C_2, \ldots, C_k) = 0, \end{array}\right.$$

jouissant des trois propriétés suivantes :

1° *La substitution à $u, v, \ldots$ d'un groupe d'intégrales ordinaires choisi à volonté les transforme toutes en des identités en $x, y, \ldots$, moyennant l'attribution simultanée à $C_1, C_2, \ldots, C_k$ de valeurs numériques correspondantes convenablement choisies.*

2° *Pour toutes valeurs de $x, y, \ldots$ tombant dans les limites*

où les intégrales d'un même groupe déterminé demeurent olotropes, pour des valeurs de u, v, ... égales aux valeurs correspondantes de ces intégrales, enfin, pour les valeurs numériques des constantes arbitraires qui conviennent à ce groupe (1°), *leurs premiers membres restent fonctions olotropes de x, y, ..., u, v, ..., C_1, C_2, ..., C_k considérées comme $h+g+k$ variables indépendantes, et leur déterminant différentiel pris par rapport à C_1, C_2, ..., C_k ne s'évanouit jamais.*

3° *Il existe au moins un groupe de k des g quantités u, v, ..., par rapport auxquelles le déterminant différentiel des mêmes premiers membres ne s'évanouit jamais non plus dans les circonstances ci-dessus définies* (2°).

390. On obtient par exemple des équations intégrales de rang k, en associant k quelconques, les premières pour fixer les idées, des équations

$$(16)\qquad \begin{cases} C_1 \;\;\; - \Gamma_1 \;\;\; (x, y, \ldots, u, v, \ldots) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_k \;\;\; - \Gamma_k \;\;\; (x, y, \ldots, u, v, \ldots) = 0, \\ C_{k+1} - \Gamma_{k+1}(x, y, \ldots, u, v, \ldots) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_g \;\;\; - \Gamma_g \;\;\; (x, y, \ldots, u, v, \ldots) = 0, \end{cases}$$

obtenues en résolvant les formules (6) par rapport aux constantes arbitraires. Car la première condition est évidemment satisfaite, et la deuxième aussi, puisque le déterminant différentiel des premiers membres par rapport à C_1, C_2, ..., C_k se réduit à

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Relativement à la troisième, observons que les déterminants différentiels de $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots \Gamma_k$, par rapport aux diverses combinaisons de k des g quantités u, v, ..., ne peuvent tous s'évanouir; car autrement celui de Γ_1, Γ_2, ..., Γ_k, Γ_{k+1}, ..., Γ_g, pris par rapport à ces g quantités, s'évanouirait aussi, puisqu'il peut être mis sous

forme d'une fonction linéaire et homogène des premiers. Or c'est impossible; car les fonctions Γ provenant de l'inversion du système des fonctions υ, φ, ..., leur déterminant différentiel est l'inverse arithmétique de celui de ces fonctions pris par rapport à C_1, C_2, ..., C_g (330).

Mais l'utilité que présente la considération des équations de ce genre dans la pratique des intégrations se rattache à un mode de génération absolument différent (400 *et suiv.* ...).

391. Voici les premières conséquences de cette définition.

I. *La résolution des équations* (15) *par rapport à* C_1, C_2, ..., C_k *fournit ces quantités en fonctions olotropes de* x, y, ..., u, v, ... (307) (389, 2°); et il serait facile de prouver que *les déterminants différentiels de ces fonctions par rapport à k quelconques des quantités* u, v, ... *ne sont pas tous identiquement nuls,* par suite (314), *qu'aucune d'elles ne peut être une fonction composée des autres.*

II. *Si dans ces expressions de* C_1, C_2, ..., C_k *on substitue à* u, v, ... *quelque groupe d'intégrales ordinaires des équations* (1), *elles deviennent des quantités indépendantes de* x, y, ...

Les valeurs numériques de ces quantités sont précisément celles qu'il faut attribuer aux constantes arbitraires pour que les équations intégrales (15) soient satisfaites par les fonctions intégrales du groupe dont il s'agit. Pour les obtenir, il suffit ainsi de résoudre les équations (15), après y avoir donné à x, y, ... des valeurs particulières quelconques x', y', ..., à u, v, ... les valeurs correspondantes u', v', ... des intégrales dont il s'agit.

III. *La résolution des équations* (15), *par rapport à un groupe au moins de k des quantités* u, v, ..., *les fournit, exprimées en fonctions olotropes des* $g-k$ *autres, de* x, y, ... *et de* C_1, C_2, ..., C_k (307) (389, 3°).

IV. *Si l'on avait* $k=g$, *on trouverait ainsi des fonctions de* x, y, ..., C_1, C_2, ..., C_k, *seulement, identifiables avec un groupe quelconque d'intégrales ordinaires, c'est-à-dire les fonctions intégrales générales;* car on prouverait facilement

que leur déterminant différentiel par rapport à C_1, C_2, ..., C_k ne s'évanouit pas dans les circonstances considérées.

On donne alors aux équations (15) le nom d'*équations intégrales générales;* leur connaissance équivaut en effet à celle de ces fonctions, parce qu'on fait ordinairement abstraction des difficultés que leur résolution peut offrir.

V. *Si*

$$\left\{\begin{array}{l} 'I_1 = 0, \\ \cdots\cdots \\ 'I_{k'} = 0, \end{array}\right.$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\left\{\begin{array}{l} ^{(j)}I_1 = 0, \\ \cdots\cdots\cdots \\ ^{(j)}I_{k^{(j)}} = 0, \end{array}\right.$$

sont j systèmes de k', k'', ..., $k^{(j)}$ équations intégrales de ces divers rangs respectivement ($k'+k''+\ldots+k^{(j)} = k \leqq g$), tels qu'il existe k des quantités u, v, ... par rapport auxquelles le déterminant différentiel de tous les premiers membres de ces k équations ne s'évanouit pas, leur association indistincte donne un système d'équations intégrales de rang k.

Les points (1°) et (3°) de la définition du n° 389 sont satisfaits par hypothèse; l'autre l'est également, car on verra sans peine que le déterminant différentiel des k premiers membres par rapport aux k constantes arbitraires qu'ils contiennent au total, se réduit, à cause de la présence de beaucoup d'éléments nuls, au produit des j déterminants différentiels des premiers membres de chacun des j systèmes donnés, pris successivement par rapport aux j groupes de k', k'', ... et $k^{(j)}$ constantes arbitraires que ces systèmes contiennent respectivement. Par hypothèse d'ailleurs, aucun de ces déterminants d'ordres k', k'', ..., $k^{(j)}$ ne peut s'évanouir.

VI. *Si, en adjoignant à un système d'équations intégrales de rang k, mis sous la forme*

$$\left\{\begin{array}{l} \Gamma_1(x, y, \ldots, u, v, \ldots) - C_1 = 0, \\ \Gamma_2(x, y, \ldots, u, v, \ldots) - C_2 = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \Gamma_k(x, y, \ldots, u, v, \ldots) - C_k = 0, \end{array}\right.$$

une équation intégrale première de la même forme

$$\Gamma(x, y, \ldots, u, v, \ldots) - C = 0,$$

on n'obtient pas un système de rang $k+1$, *la fonction* Γ *est certainement composée des autres* $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_k$.

Le déterminant différentiel des premiers membres de ces $k+1$ équations par rapport à $C_1, C_2, \ldots, C_k$, C n'étant pas identiquement nul, puisqu'il se réduit à $(-1)^{k+1}$, leurs déterminants différentiels par rapport à $k+1$ quelconques des quantités $u, v, \ldots$ le sont tous, car autrement (V) ces équations formeraient un système de rang $k+1$; mais, comme ceux des premiers membres des k premières par rapport à k quelconques des mêmes quantités sont supposés ne pas tous l'être, on a certainement

$$\Gamma = \mathfrak{f}(\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_k, x, y, \ldots),$$

où $\mathfrak{f}$ désigne quelque composante (316).

Maintenant, la substitution à $u, v, \ldots$ de celles des fonctions intégrales du système (1) qui donnent à $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_k$ les valeurs constantes $C_1, C_2, \ldots, C_k$, réduit aussi par hypothèse Γ à une certaine constante C; on a donc, quelles que soient $x, y, \ldots$,

$$\mathfrak{f}(C_1, C_2, \ldots, C_k, x, y, \ldots) = C,$$

d'où, quelles que soient en outre $C_1, C_2, \ldots C_k$, les identités

$$\frac{d\mathfrak{f}(C_1, C_2, \ldots, C_k, x, y, \ldots)}{dx} = \frac{d\mathfrak{f}}{dy} = \ldots = 0,$$

montrant qu'à titre explicite, $x, y, \ldots$ entraient en apparence seulement dans la fonction composée $\mathfrak{f}(\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_k, x, y, \ldots)$.

392. *Si, en traitant* $u, v, \ldots$ *comme des fonctions simples indéterminées de* $x, y, \ldots$, *on différentie par rapport à l'une de ces variables,* x *pour fixer les idées, le premier membre*

$$I(x, y, \ldots, u, v, \ldots, C_1, C_2, \ldots, C_k)$$

de l'une quelconque des équations (15), *et qu'ensuite on sub-*

stitue à $C_1, C_2, \ldots, C_k$ *leurs expressions en* $x, y, \ldots, u, v, \ldots$ *fournies par la résolution de ces équations, puis à* $\frac{du}{dx}, \frac{dv}{dx}, \ldots$ *les seconds membres des équations de la ligne* (x) *du Tableau* (1), *on obtient une fonction de* $x, y, \ldots, u, v, \ldots$ *qui, dans les aires* (3) (2), *est nulle identiquement, c'est-à-dire pour toutes les valeurs de ces quantités considérées comme* $h+g$ *variables indépendantes.*

Soient

$$(17) \qquad x', \; y', \; \ldots, \; u', \; v', \; \ldots$$

un système particulier quelconque de pareilles valeurs de ces quantités, puis

$$\begin{gathered} \Gamma_1(x', y', \ldots, u', v', \ldots), \\ \Gamma_2(x', y', \ldots, u', v', \ldots), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Gamma_k(x', y', \ldots, u', v', \ldots) \end{gathered}$$

les valeurs fournies pour les constantes arbitraires, par les équations (15), quand on y donne à $x, y, \ldots, u, v, \ldots$ les valeurs particulières (17), et nommons maintenant $u, v, \ldots$ les intégrales ordinaires des équations différentielles (1), déterminées par les conditions initiales

$$(18) \qquad u = u', \qquad v = v', \qquad \ldots, \qquad \text{pour} \begin{cases} x = x', \\ y = y', \\ \ldots\ldots \end{cases}$$

Par définition, on a, quelles que soient $x, y, \ldots,$

$$I(x, y, \ldots, u, v, \ldots, \Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_k) = 0,$$

d'où, en différentiant par rapport à x,

$$\frac{\partial I}{\partial x} + \frac{\partial I}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial I}{\partial v}\frac{dv}{dx} + \ldots = 0.$$

Mais, comme les intégrales $u, v, \ldots$ satisfont aux équations de la ligne (x) du Tableau (1), il vient aussi, toujours quelles que soient $x, y, \ldots,$

$$\Omega(x, y, \ldots, u, v, \ldots, x', y', \ldots, u', v', \ldots) = 0,$$

en appelant Ω la fonction composée de u, v, ...,

$$\frac{\partial I(x, y, \ldots, u, v, \ldots, \Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_k)}{\partial x} + \frac{\partial I}{\partial u} U_x(x, y, \ldots, u, v, \ldots) + \frac{\partial I}{\partial v} V_x + \ldots.$$

En posant dans cette relation $x = x'$, $y = y'$, ..., elle donne donc à cause des conditions (18),

$$\Omega(x', y', \ldots, u', v', \ldots, x', y', \ldots, u', v', \ldots) = 0.$$

Or le premier membre de cette dernière est évidemment la valeur que prend la fonction de x, y, ..., u, v, ... dont nous voulons démontrer la nullité identique, quand on attribue à ses $h + g$ variables les valeurs particulières quelconques (17).

393. *Quand $k = g$, c'est-à-dire quand il s'agit d'équations intégrales générales* (**391**, IV), *les expressions de* $\frac{du}{dx}$, $\frac{dv}{dx}$, ..., *tirées de ces équations différentiées par rapport à x,*

$$(19)\quad \left\{\begin{array}{l} \frac{\partial I_1}{\partial x} + \frac{\partial I_1}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial I_1}{\partial v}\frac{dv}{dx} + \ldots = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \frac{\partial I_g}{\partial x} + \frac{\partial I_g}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial I_g}{\partial v}\frac{dv}{dx} + \ldots = 0, \end{array}\right.$$

coïncident avec les seconds membres de la ligne (x) *du Tableau* (1), *après la substitution à* C_1, C_2, ..., C_g, *de leurs expressions en* x, y, ..., u, v, ... *fournies par la résolution de ces équations intégrales.*

Les équations (19) constituent un système linéaire, complet et déterminé, entre $\frac{du}{dx}$, $\frac{dv}{dx}$, ...; elles sont effectivement en même nombre g, et le déterminant des coefficients de ces dérivées ne peut s'évanouir, puisqu'il est précisément le déterminant différentiel de I_1, I_2, ..., I_g par rapport à u, v, ... (**389**, 3°). De même évidemment, pour ce que deviennent ces équations après l'élimi-

nation de $C_1, C_2, \ldots, C_g$,

$$\left\{\begin{array}{l}\left[\frac{\partial I_1}{\partial x}\right]+\left[\frac{\partial I_1}{\partial u}\right]\frac{du}{dx}+\ldots=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \left[\frac{\partial I_g}{\partial x}\right]+\left[\frac{\partial I_g}{\partial u}\right]\frac{du}{dx}+\ldots=0.\end{array}\right.$$

Or (392) toutes ces dernières deviennent des identités en x, y, ..., u, v, ..., quand on y remplace $\frac{du}{dx}$, $\frac{dv}{dx}$, ..., par U_x, V_x, ... Donc leur résolution donnera forcément

$$\frac{du}{dx}=U_x, \quad \frac{dv}{dx}=V_x, \quad \ldots;$$

c'est précisément ce qu'il fallait prouver.

394. Si donc on élimine les constantes arbitraires après avoir différentié les équations intégrales générales par rapport à x, y, ... successivement, on obtient des équations dont la résolution par rapport aux diverses dérivées des fonctions intégrales fait retomber sur les divers seconds membres du système (1).

C'est là une corrélation inverse très importante entre les équations intégrales générales et le système immédiat des équations différentielles totales d'où elles proviennent par intégration. On l'exprime habituellement en disant que *la différentiation des équations intégrales générales et l'élimination postérieure des constantes arbitraires reproduisent le système des équations différentielles primitives* (*ou du moins un système équivalent*).

395. *En substituant les équations intégrales* (15) *de rang k aux hk équations différentielles du Tableau* (1), *dont les colonnes correspondent à k fonctions inconnues par rapport auxquelles le déterminant différentiel des premiers membres $I_1, \ldots, I_k$ ne s'évanouit pas, on obtient un système mixte* (376, V) *ayant mêmes intégrales* (*ordinaires*) *que le proposé.*

Pour fixer les idées et pour abréger, supposons $h=1$, $k=2$, et raisonnons simplement sur les équations différentielles ordi-

naires (388)

$$(20)\quad \frac{du}{dx} = \mathrm{U}(x, u, v, w, s, \ldots), \quad \frac{dv}{dx} = \mathrm{V}, \quad \frac{dw}{dx} = \mathrm{W}, \quad \frac{ds}{dx} = \mathrm{S}, \quad \ldots,$$

admettant les équations intégrales secondes,

$$(21)\quad \begin{cases} \mathrm{I}_1(x, u, v, w, s, \ldots, \mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2) = 0, \\ \mathrm{I}_2(x, u, v, w, s, \ldots, \mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2) = 0. \end{cases}$$

En supposant que le couple u, v soit un de ceux par rapport auxquels le déterminant différentiel de I_1, I_2 ne s'évanouit pas (389, 3°), il suffit de prouver que les intégrales du système mixte formé par les équations finies (21) et les $g-2$ dernières équations (20) appartiennent au proposé; car, par définition, et sauf l'attribution de valeurs convenables à C_1, C_2, toutes celles du proposé vérifient ces équations finies (21).

Les intégrales dont il s'agit satisfont évidemment aux équations différentielles

$$\begin{cases} \left[\frac{\partial \mathrm{I}_1}{\partial x}\right] + \left[\frac{\partial \mathrm{I}_1}{\partial u}\right]\frac{du}{dx} + \left[\frac{\partial \mathrm{I}_1}{\partial v}\right]\frac{dv}{dx} + \left[\frac{\partial \mathrm{I}_1}{\partial w}\right]\mathrm{W} + \left[\frac{\partial \mathrm{I}_1}{\partial s}\right]\mathrm{S} + \ldots = 0, \\ \left[\frac{\partial \mathrm{I}_2}{\partial x}\right] + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0, \end{cases}$$

obtenues en différentiant les équations (21), éliminant les constantes au moyen de ces équations elles-mêmes, et substituant à $\frac{dw}{dx}$, $\frac{ds}{dx}$, ... les seconds membres des $g-2$ dernières équations (20). Or, comme au n° 393 la résolution par rapport à $\frac{du}{dx}$, $\frac{dv}{dx}$ de ces équations linéaires ne peut manquer de faire retrouver U, V; car, d'une part, le déterminant des coefficients de ces dérivées est essentiellement différent de zéro; d'autre part (392), la substitution de U, V à $\frac{du}{dx}$, $\frac{dv}{dx}$ donne des identités en x, u, v, w, s, ... Les intégrales en question satisfont donc bien aussi aux deux premières équations (20).

396. Pour intégrer le système (1) quand on a des équations intégrales de rang k, il suffit donc (376, V) de résoudre celles-ci

par rapport à k fonctions inconnues convenablement choisies, de porter leurs expressions ainsi trouvées au moyen de x, y, ..., de C_1, C_2, ..., C_k et des $g-k$ autres fonctions inconnues, dans celles des équations (1) qui ont pour premiers membres les dérivées de ces dernières, puis d'intégrer ce nouveau système de $(g-k)h$ équations différentielles totales à $g-k$ fonctions inconnues seulement, des variables principales x, y, ... et paramétriques C_1, C_2, ..., C_k.

397. Toutes choses égales d'ailleurs, la difficulté d'intégrer des équations différentielles totales se mesure par la grandeur du nombre g des fonctions inconnues. Dans la *pratique* des questions de ce genre, et quoique cette autre difficulté puisse devenir fort grande, on néglige celle de résoudre des équations finies, parce qu'elles sont infiniment plus maniables que des équations différentielles, et qu'habituellement elles s'éloignent peu de types bien connus.

La connaissance d'équations intégrales formant des systèmes distincts (391, V) *constitue donc, relativement à l'intégration complète des équations différentielles* (1), *un progrès mesuré en importance par la somme k de leurs rangs.*

Aussi, toutes les fois que les circonstances permettent d'apercevoir quelque système d'équations intégrales, on s'empresse de les substituer aux colonnes du Tableau (1) qu'elles peuvent remplacer. En général, la découverte d'un pareil système s'effectue par celle d'équations intégrales premières qu'on obtient isolément, comme nous allons l'expliquer, et qu'on associe ensuite conformément aux indications de l'alinéa V du n° 391.

398. Voici encore une observation à retenir. La connaissance d'une simple *équation intégrale* du système (1), c'est-à-dire d'une relation entre les intégrales ordinaires d'un même groupe particulier, peut conduire à la découverte de plusieurs autres.

Pour fixer les idées, supposons que certaines intégrales des équations différentielles ordinaires (20) satisfassent à l'équation finie connue

$$J(x, u, v, \dots) = 0; \tag{22}$$

elles satisferont évidemment aussi aux équations finies en nombre illimité

$$'J = \frac{\partial J}{\partial x} + \frac{\partial J}{\partial u} U + \frac{\partial J}{\partial v} V + \frac{\partial J}{\partial w} W + \ldots = o,$$

$$''J = \frac{\partial' J}{\partial x} + \frac{\partial' J}{\partial u} U + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = o,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

qui se déduisent de la première, puis les unes des autres successivement, suivant une loi évidente.

Toutes ces nouvelles équations peuvent sans doute se réduire à la proposée ; mais il peut parfaitement arriver aussi que les $k - 1$ premières ($k > 1$) forment avec celle-ci un système de k équations résolubles par rapport à k des inconnues u, v, ... La recherche des intégrales dont il s'agit est alors ramenée à l'intégration d'équations différentielles à $g - k$ fonctions inconnues seulement (395). Et même si $k = g$ (on ne peut évidemment avoir $k > g$), toute intégration ultérieure serait supprimée.

Quand l'équation (22) contient des constantes arbitraires, cette méthode permet de lui en adjoindre de semblables complétant avec elle un système d'équations intégrales de rang plus ou moins élevé. Mais nous ne pouvons pas insister davantage.

Multiplicateurs intégrants.

399. *Il existe quelque système de g multiplicateurs*

$$(23) \qquad \lambda(x, y, \ldots, u, v, \ldots), \quad \mu, \ldots,$$

fonctions olotropes de $x, y, z, \ldots, u, v, \ldots$ non toutes identiquement nulles, jouissant de cette propriété que les h fonctions composées différentielles

$$(24) \qquad \begin{cases} \lambda \dfrac{du}{dx} + \mu \dfrac{dv}{dx} + \ldots - \lambda U_x - \mu V_x - \ldots, \\ \lambda \dfrac{du}{dy} + \mu \dfrac{dv}{dy} + \ldots - \lambda U_y - \mu V_y - \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

obtenues en sommant dans les diverses lignes du Tableau (1) *les produits par* λ, μ, ... *des excès des premiers membres sur*

les seconds, soient les dérivées premières par rapport à $x, y, \ldots,$ d'une même fonction composée finie de $u, v, \ldots$ considérées comme fonctions simples indéterminées.

On en obtient effectivement de semblables en prenant

$$(25) \qquad \lambda = \frac{\partial \Gamma}{\partial u}, \qquad \mu = \frac{\partial \Gamma}{\partial v}, \qquad \ldots,$$

où Γ désigne une quelconque des fonctions de $x, y, \ldots, u, v, \ldots$ qui figurent dans les relations (16) provenant de la résolution des formules (6) par rapport aux constantes arbitraires. Car, l'équation correspondante

$$(26) \qquad \Gamma(x, y, \ldots, u, v, \ldots) - C = 0$$

étant une intégrale première, sa différentiation par rapport à x, par exemple, suivie de la substitution à $\frac{du}{dx}, \frac{dv}{dx}, \cdots$ des seconds membres des équations de la première ligne du Tableau (1), donne, quelles que soient $x, y, \ldots, u, v, \ldots,$

$$(27) \qquad \frac{\partial \Gamma}{\partial x} + \frac{\partial \Gamma}{\partial u} U_x + \frac{\partial \Gamma}{\partial v} V_x + \ldots = \frac{\partial \Gamma}{\partial x} + \lambda U_x + \mu V_x + \ldots = 0,$$

d'où

$$-\lambda U_x - \mu V_x - \ldots = \frac{\partial \Gamma}{\partial x},$$

moyennant quoi et les formules (25), la première des expressions (24) se réduit à

$$\frac{d}{dx} \Gamma(x, y, \ldots, u, v, \ldots),$$

$u, v, \ldots$ désignant ici des fonctions simples indéterminées de $x, y, \ldots$; et de même pour les autres expressions (24).

Nous n'avons rien eu à substituer à la constante arbitraire, parce que la différentiation de l'équation (26) la fait disparaître.

Remarquons encore que cette équation (26) n'est pas autre chose qu'une intégrale première résolue par rapport à sa constante arbitraire, et qu'ainsi *on arrivera aux mêmes conclusions, en prenant pour* Γ *l'expression d'une constante arbitraire au moyen de $x, y, \ldots, u, v, \ldots,$ tirée d'une équation intégrale*

première quelconque [ou même d'un système de rang quelconque, résolu par rapport aux constantes (**391**, I)].

400. *Réciproquement, si les multiplicateurs* (23) *rendent les expressions* (24) *dérivées exactes par rapport à* x, y, ..., *d'une même fonction composée* $\Gamma(x, y, \ldots, u, v, \ldots)$ *des fonctions simples indéterminées* u, v, ..., *l'équation* (26) *est une intégrale première du système proposé* (1).

Car la substitution d'un groupe quelconque d'intégrales ordinaires à u, v, ... dans les expressions (24) donne quelles que soient $x, y, \ldots$,

$$\lambda\left(\frac{du}{dx} - U_x\right) + \mu\left(\frac{dv}{dx} - V_x\right) + \ldots = 0 = \frac{d}{dx}\Gamma(x, y, \ldots, u, v, \ldots),$$
$$\lambda\left(\frac{du}{dy} - U_y\right) + \mu\left(\frac{dv}{dy} - V_y\right) + \ldots = 0 = \frac{d}{dy}\Gamma(x, y, \ldots, u, v, \ldots),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Cette substitution rend donc identiquement nulles toutes les dérivées premières de la fonction composée dont il s'agit, d'où (**193**), et en appelant C quelque quantité indépendante de $x, y, \ldots$,

$$\Gamma(x, y, \ldots, u, v, \ldots) = C.$$

Les conditions (2°), (3°) de la définition du n° **389** sont d'ailleurs remplies; car la dérivée par rapport à C du premier membre de l'équation (26) se réduit à -1 (non $= 0$), et celles prises par rapport à u, v, ... sont précisément les multiplicateurs (23) supposés non tous identiquement nuls.

401. En raisonnant de la même manière, on trouve cette proposition plus générale :

Si les $k(\leqq g)$ *systèmes de multiplicateurs*

$$\begin{array}{lll} \lambda_1, & \mu_1, & \ldots, \\ \lambda_2, & \mu_2, & \ldots, \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_k, & \mu_k, & \ldots, \end{array}$$

sont distincts, c'est-à-dire si les déterminants des diverses com-

binaisons k à k des colonnes de leur Tableau ne sont pas tous identiquement nuls, les équations finies correspondantes

$$\begin{cases} \Gamma_1(x, y, \ldots, u, v, \ldots) - C_1 = 0, \\ \Gamma_2(x, y, \ldots, u, v, \ldots) - C_2 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Gamma_k(x, y, \ldots, u, v, \ldots) - C_k = 0 \end{cases}$$

constituent un système d'équations intégrales de rang k.

Quand $k = g$, on a les équations intégrales générales.

402. Ainsi donc, le calcul des intégrales peut s'opérer : 1° en cherchant g systèmes distincts de multiplicateurs intégrants; 2° en égalant à g constantes arbitraires des déterminations particulières des g intégrales indéfinies ($i = 1, 2, \ldots, g$)

$$(28) \quad \begin{cases} \int[\lambda_i du + \mu_i dv + \ldots - (\lambda_i U_x + \mu_i V_x + \ldots) dx \\ \qquad\qquad - (\lambda_i U_y + \mu_i V_y + \ldots) dy - \ldots], \end{cases}$$

aux variables $u, v, \ldots, x, y, \ldots$ (**208** *et suiv.*).

On *aperçoit* quelquefois des multiplicateurs intégrants; mais, pour les découvrir quand on n'en connaît point, on ne possède aucune méthode préférable à tout autre procédé d'intégration du système (1). Les conditions d'intégrabilité (*loc. cit.*) de la différentielle totale ci-dessus

$$\frac{d\lambda_i}{dv} = \frac{d\mu_i}{du}, \quad \ldots, \quad \frac{d\lambda_i}{dx} = -\frac{d}{du}(\lambda_i U_x + \mu_i V_x + \ldots), \quad \ldots$$

constituent bien $\frac{(g+h)(g+h-1)}{1.2}$ équations différentielles partielles du premier ordre, auxquelles doivent satisfaire $\lambda_i, \mu_i, \ldots$ considérés naturellement comme fonctions inconnues des variables indépendantes $x, y, \ldots, u, v, \ldots$; mais leur intégration n'est pas plus facile que celle du système proposé (1). C'est, au contraire, à l'intégration d'équations différentielles totales qu'on s'efforce toujours de ramener en dernière analyse celle des équations différentielles partielles.

Quand les multiplicateurs ont pu être découverts, il reste encore à exécuter des quadratures (**223** *bis*); l'opération a fait néanmoins de grands progrès, car il est bien plus facile d'étudier

une fonction dont on a toutes les dérivées premières que des fonctions connues seulement par des équations différentielles de la forme (1), où elles sont mêlées aux variables.

Quoi qu'il en soit, cette méthode des multiplicateurs est appliquée chaque fois que les circonstances le permettent. On l'emploie pour ainsi dire exclusivement quand il s'agit de prouver que des équations différentielles totales données ont pour intégrales générales des équations connues.

403. Voici encore quelques points à noter.

I. *Il existe certainement g systèmes distincts de multiplicateurs.*

On en obtient effectivement de tels, en prenant les g systèmes de dérivées premières par rapport à u, v, ... des fonctions Γ_1, Γ_2, ..., Γ_g du n° 390.

II. *En les représentant par*

$$(29)\qquad \left\{\begin{array}{lll} \lambda_1, & \mu_1, & \ldots. \\ \lambda_2, & \mu_2, & \ldots. \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_g, & \mu_g, & \ldots, \end{array}\right.$$

tout autre système

$$(30)\qquad \lambda_0,\quad \mu_0,\quad \ldots$$

de multiplicateurs intégrants est de la forme

$$(31)\qquad \lambda_0 = \frac{\partial\Omega}{\partial\Gamma_1}\lambda_1 + \frac{\partial\Omega}{\partial\Gamma_2}\lambda_2 + \ldots,\qquad \mu_0 = \frac{\partial\Omega}{\partial\Gamma_1}\mu_1 + \frac{\partial\Omega}{\partial\Gamma_2}\mu_2 + \ldots,\qquad \ldots,$$

où $\Omega(\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_g)$ *désigne quelque fonction composée de* Γ_1, Γ_2, ..., Γ_g.

Si l'on nomme Γ_0 une détermination de ce que devient l'intégrale indéfinie (28) quand on y attribue l'indice o à λ, μ, ..., les $g+1$ groupes de relations

$$\frac{\partial\Gamma_i}{\partial u} = \lambda_i,\qquad \frac{\partial\Gamma_i}{\partial v} = \mu_i,\qquad \ldots,$$

$$\frac{\partial\Gamma_i}{\partial x} = -U_x\lambda_i - V_x\mu_i - \ldots,\qquad \frac{\partial\Gamma_i}{\partial y} = -U_y\lambda_i - V_y\mu_i - \ldots,\qquad \ldots,$$

où $i = 1, 2, \ldots, g$, o montrent que les déterminants différentiels des fonctions

$$\begin{array}{l} \Gamma_1(x, y, \ldots, u, v, \ldots), \\ \Gamma_2(x, y, \ldots, u, v, \ldots), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Gamma_g(x, y, \ldots, u, v, \ldots), \\ \Gamma_0(x, y, \ldots, u, v, \ldots), \end{array}$$

par rapport à $g+1$ quelconques des variables $x, y, \ldots, u, v, \ldots$ sont tous identiquement nuls. Comme celui des g premières par rapport à $u, v, \ldots$ ne l'est pas, la dernière Γ_0 en est une certaine fonction composée $\Omega(\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_g)$ (**314**). On en conclut bien

$$\lambda_0 = \frac{d\Gamma_0}{du} = \frac{\partial\Omega}{\partial\Gamma_1}\frac{d\Gamma_1}{du} + \frac{\partial\Omega}{\partial\Gamma_2}\frac{d\Gamma_2}{du} + \ldots = \frac{\partial\Omega}{\partial\Gamma_1}\lambda_1 + \frac{\partial\Omega}{\partial\Gamma_2}\lambda_2 + \ldots.$$

. . . .

III. Inversement, si l'on connaît les $g+1$ systèmes (29) (30) de multiplicateurs dont les g premiers sont distincts, la résolution des équations linéaires (31) donnera pour $\frac{\partial\Omega}{\partial\Gamma_1}, \frac{\partial\Omega}{\partial\Gamma_2}, \ldots, \frac{\partial\Omega}{\partial\Gamma_g}$ certaines fonctions $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_g$ de $x, y, \ldots, u, v, \ldots$, que la substitution à $u, v, \ldots$ d'intégrales ordinaires quelconques des équations proposées (1) transformera comme $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_g$ en des constantes. Effectivement ces dérivées

$$\Omega'_{\Gamma_1}(\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_g), \quad \Omega'_{\Gamma_2}(\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_g), \quad \ldots$$

sont aussi, comme Ω, des fonctions composées de $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_g$.

En appelant donc $c_1, c_2, \ldots, c_g$ des constantes arbitraires, *chacune des équations*

$$\begin{array}{l} \gamma_1(x, y, \ldots, u, v, \ldots) - c_1 = 0, \\ \gamma_2(x, y, \ldots, u, v, \ldots) - c_2 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \gamma_g(x, y, \ldots, u, v, \ldots) - c_g = 0 \end{array}$$

est une intégrale première du système (1), *et l'association de toutes fournira d'une autre manière les équations intégrales générales, si toutefois aucune des fonctions* $\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_g$ *ne se réduit à une fonction composée des autres* (**391**, VI).

IV. Dans le n° **399** nous avons constaté accidentellement que

toute fonction Γ, c'est-à-dire, au fond, *toute fonction de $x, y, \ldots, u, v, \ldots$ dont l'égalisation à une constante arbitraire donne une intégrale première, satisfait au système immédiat linéaire d'équations différentielles partielles*

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{d\Gamma}{dx} = -U_x \dfrac{d\Gamma}{du} - V_x \dfrac{d\Gamma}{dv} - \ldots, \\ \dfrac{d\Gamma}{dy} = -U_y \dfrac{d\Gamma}{du} - V_y \dfrac{d\Gamma}{dv} - \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

aux h variables principales $x, y, \ldots$ et aux g variables paramétriques $u, v, \ldots$.

Cette remarque ne nous est pas actuellement utile, mais, comme nous le verrons dans la troisième Partie de cet Ouvrage, elle sert de fondement essentiel à la méthode d'intégration des équations de cette forme.

Observations complémentaires diverses.

404. Nous rassemblons dans ce paragraphe final des remarques utiles qui ne s'enchaînent pas, mais que nous ne saurions où mieux placer ailleurs.

Les équations différentielles (1) *font connaître a priori les valeurs correspondantes des variables et des intégrales ordinaires dans les phases critiques de celles-ci* (**146**). En vertu du théorème fondamental du n° **301** que nous avons rappelé au commencement de ce Chapitre, ce sont évidemment les systèmes de valeurs de $x, y, \ldots, u, v, \ldots$, soit infinies en tout ou en partie, soit singulières pour un ou plusieurs des seconds membres des équations proposées.

Dans le premier cas, on a habituellement intérêt à regarder ce qui se passe, au moyen d'un changement de variables (**324** *et suiv.*), consistant à prendre pour nouvelles variables ou fonctions inconnues les inverses arithmétiques (alors infiniment petites) de celles qui sont infinies (*Cf.* **148**).

Dans le second cas, on peut être obligé de procéder par l'étude directe de ce que deviennent les développements normaux des intégrales, quand les variables tendent vers les valeurs critiques.

Mais quelquefois aussi certains changements de variables réussissent à ramener les équations différentielles à de nouvelles dont les seconds membres sont olotropes; les intégrales de ces dernières, alors olotropes, transformées par le changement inverse, rendront celles des proposées sous une forme permettant la discussion.

Par exemple, et en supposant connue la théorie des radicaux que nous exposerons au commencement de notre deuxième Partie, considérons l'équation très simple

$$(32) \qquad \frac{du}{dx} = b + \sqrt{u - ax},$$

a, b désignant deux constantes. Son second membre cesse d'être olotrope quand l'expression sous le radical s'évanouit, c'est-à-dire pour tout couple $a\theta$, θ de solutions numériques de l'équation

$$(33) \qquad u - ax = 0.$$

Ainsi donc, l'intégrale ordinaire, qui est égale à $a\theta$ pour $x = \theta$, entre alors dans une phase critique. Pour la discuter par un simple changement de variables, posons

$$u = ax + u'^2.$$

La nouvelle fonction inconnue u' s'annule en $x = \theta$, et satisfait à l'équation différentielle

$$(34) \qquad \frac{du'}{dx} = \frac{b-a}{2u'} + \frac{1}{2}.$$

I. Si $b = a$, cette équation donne $u' = \frac{x - \theta}{2}$, d'où

$$(35) \qquad u = ax + \frac{(x-\theta)^2}{4},$$

fonction qui se trouve être olotrope en $x = \theta$, et même indéfiniment; on en conclut que *toutes les intégrales ordinaires de l'équation proposée* (32) *sont indéfiniment olotropes*.

II. Si b non $= a$, $\frac{du'}{dx}$ est infinie en $x = \theta$ parce que $u' = 0$, et

$\frac{d^2u}{dx^2}$ également, partant non olotrope, à cause de

$$\frac{du}{dx} = a + 2u' \frac{du'}{dx} = b + u', \qquad \frac{d^2u}{dx^2} = \frac{du'}{dx};$$

on en conclut cette fois qu'en $x = \theta$ *l'intégrale considérée entre dans une véritable phase singulière* (165).

405. Il n'y a évidemment à se préoccuper des intégrales exceptionnelles (380, III) que dans le cas où le nombre des variables indépendantes est > 1. La seule observation générale à faire à leur sujet, quand il s'agit d'équations différentielles totales, est que *les équations additionnelles auxquelles elles doivent satisfaire sont nécessairement finies, comme les conditions de passivité non satisfaites dont elles constituent une interprétation spéciale*. Il se peut même que ces équations finies soient assez nombreuses, soit pour fournir à elles seules les intégrales de cette espèce, soit pour montrer par leur seule incompatibilité qu'il n'en existe point.

Considérons, par exemple, le système

$$(36)\qquad \begin{cases} \dfrac{du}{dx} = A + (u - ax - by)^p, \\ \dfrac{du}{dy} = B + (u - ax - by)^q, \end{cases}$$

ayant

$$(37)\qquad \begin{cases} p(B - b)(u - ax - by)^{p-1} - q(A - a)(u - ax - by)^{q-1} \\ \quad + (p - q)(u - ax - by)^{p+q-1} = 0 \end{cases}$$

pour condition de passivité unique.

Si l'on a, par exemple,

$$p - q = p(B - b) - q(A - a) = 0,$$

elle est satisfaite parce que son premier membre s'évanouit quelles que soient x, y, u. Il y a alors une intégrale dépendant d'une constante arbitraire. Etc.

Si l'équation (37) n'a pas un premier membre identiquement nul, sa résolution par rapport à u fournira diverses fonctions de x, y, dont on retiendra, comme intégrales exceptionnelles,

celles qui *par hasard* satisferaient aux équations différentielles proposées (36). Si p et q sont > 1, l'une de ces fonctions est évidemment

$$ax + by,$$

à retenir ou à rejeter selon qu'on aura à la fois ou non $a = A$, $b = B$.

406. *L'observation faite à l'instant est textuellement applicable aux équations additionnelles à former pour obtenir les intégrales singulières* (379) *des équations différentielles totales* (1).

Pour l'équation différentielle ordinaire (32), par exemple, on trouvera l'équation additionnelle unique (33) qui donne la fonction

$$ax$$

pour seule intégrale singulière possible. La substitution faite après coup dans l'équation (32) montre que cette fonction en est véritablement une intégrale, ou non, selon qu'on a $a =$ ou $\neq b$. Dans le premier cas, il existe l'intégrale singulière $u = ax$; dans le second, il n'y en a aucune.

407. En rapprochant les considérations du n° **404** de la définition des intégrales singulières (**288**), on aperçoit que *les valeurs de ces dernières, associées à celles correspondantes des variables, sont précisément les valeurs de u, v, ..., x, y, ..., dans les phases singulières, ou tout au moins critiques, des intégrales ordinaires.*

408. Quand on connaît les fonctions intégrales générales (6) du système (1), on peut procéder par une voie toute différente à la recherche des intégrales singulières.

Nous avons vu (383) que leur déterminant différentiel par rapport aux constantes arbitraires,

$$\Delta(x, y, \ldots C_1, \ldots, C_g) = \begin{vmatrix} \frac{d\upsilon}{dC_1} & \frac{d\upsilon}{dC_2} & \cdots & \frac{d\upsilon}{dC_g} \\ \frac{d\varphi}{dC_1} & \cdots & \cdots & \frac{d\varphi}{dC_g} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}.$$

ne peut pas s'évanouir tant que x, y, ... tombent dans les aires (3), et qu'on attribue à C_1, C_2, ..., C_g, des valeurs faisant tomber dans les aires (2) les valeurs correspondantes de u, v, ... Il en résulte que les valeurs de x, y, ..., u, v, ..., pour lesquelles quelque second membre des équations différentielles proposées cesse d'être olotrope, sont précisément celles qui, jointes à des valeurs convenables de C_1, C_2, ..., C_g, satisfont simultanément aux équations (6) et à la condition

$$\Delta(x, y, \ldots, C_1, C_2, \ldots, C_g) = 0.$$

En résolvant donc cette condition par rapport à quelqu'une des constantes arbitraires, C_g par exemple si c'est possible, et portant son expression dans les formules (6), on obtiendra certaines fonctions de x, y, ..., dépendant en outre des paramètres indéterminés C_1, C_2, ..., C_{g-1}, qui comprendront certainement toutes les intégrales singulières. Il ne restera plus qu'à essayer si l'attribution de valeurs convenables à ces paramètres peut conférer à quelques-unes de ces fonctions la propriété de vérifier les équations différentielles proposées (1), puis à retenir seulement celles qu'on obtiendra ainsi.

Par exemple, nous avons reconnu implicitement ci-dessus (**404**, I) qu'en regardant θ comme une constante arbitraire, la fonction (35) est l'intégrale générale de l'équation (32) pour $b = a$.

On pourra donc former la condition

$$(38) \qquad \frac{d}{d\theta}\left[ax + \frac{(x-\theta)^2}{4}\right] = -\frac{x-\theta}{2} = 0,$$

et porter dans l'équation (35) l'expression de θ tirée de celle-ci. On retombe bien sur l'intégrale singulière ax déjà trouvée au n° **406**.

Mais, outre qu'il est fort indirect, ce procédé est bien loin de valoir la méthode générale, dont l'application est infiniment plus facile que la construction préalable des intégrales générales.

Nous ajouterons encore qu'il peut conduire à des intégrales non singulières, si les intégrales générales ont été mises sous la forme incorrecte contre laquelle nous prémunissions le lecteur au n° **385**.

Si, par exemple, on écrivait θ^2 au lieu de θ dans la formule (35), elle n'en fournirait pas moins toutes les intégrales ordinaires de l'équation différentielle originaire (et même elle donnerait chacune d'elles deux fois). Mais la condition (38) devenant

$$-\theta(x-\theta^2)=0$$

donnerait en outre $\theta=0$; d'où l'intégrale $ax+\frac{x^2}{4}$ qui est simplement ordinaire.

L'application de ce procédé à des intégrales générales dont la forme ne serait pas d'une correction certaine devrait donc être accompagnée de l'exclusion des fonctions qui rentreraient dans les intégrales générales.

109. L'étude d'un système donné d'équations différentielles quelconques doit toujours se faire par l'intermédiaire du système immédiat équivalent. Comme exemple, nous traiterons le cas classique de l'équation différentielle d'ordre quelconque g

$$\frac{d^g u}{dx^g}=f\left(x,\ u,\ \frac{du}{dx},\ \ldots,\ \frac{d^{g-1}u}{dx^g}\right), \tag{39}$$

à une fonction inconnue u d'une seule variable x, donnée toute résolue par rapport à la dérivée de l'ordre le plus élevé.

Le système immédiat équivalent

$$\left\{\begin{array}{lll}\dfrac{du}{dx}=u', & \dfrac{du'}{dx}=u'', & \ldots,\\[2ex] \dfrac{du^{(g-2)}}{dx}=u^{(g-1)}, & \dfrac{du^{(g-1)}}{dx}=f(x,\ u,\ u',\ \ldots,\ u^{(g-1)}) & \end{array}\right. \tag{40}$$

est aux différentielles totales puisque son Tableau ne contient aucune case vide, et, comme il y a une seule variable, il est passif de lui-même, c'est-à-dire sans condition. Le dernier des seconds membres $f(x,\ u,\ u',\ \ldots,\ u^{(g-1)})$ peut seul cesser d'être olotrope, puisque les autres se réduisent aux fonctions linéaires u', u'', ..., $u^{(g-1)}$. De plus, les fonctions inconnues auxiliaires u', u'', ..., $u^{(g-1)}$ sont précisément les dérivées d'ordres $1, 2, \ldots, g-1$, de la fonction inconnue principale u, en sorte que les fonctions

intégrales générales du système (40) sont

$$(41)\quad \begin{cases} u = \upsilon(x, C_1, C_2, \ldots, C_g), \\ u' = \upsilon'(x, C_1, C_2, \ldots, C_g), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u^{(g-1)} = \upsilon^{(g-1)}(x, C_1, C_2, \ldots, C_g), \end{cases}$$

où $\upsilon', \upsilon'', \ldots, \upsilon^{(g-1)}$ désignent les dérivées de υ, d'ordres 1, 2, ..., $g-1$ par rapport à x seulement.

Cela posé, les propriétés de l'équation (39) sont en quelque sorte celles du système (40), formulées dans un langage différent.

Par exemple :

I. *Si la fonction f est olotrope en $x_0, u_0, u'_0, \ldots, u_0^{(g-1)}$, l'équation* (39) *admet une intégrale, et une seule, prenant, elle et ses $g-1$ premières dérivées, les valeurs $u_0, u'_0, \ldots, u_0^{(g-1)}$ en $x = x_0$.*

II. *Toutes les intégrales de cette espèce, ou ordinaires, sont données par la première des formules* (41), *moyennant l'attribution de valeurs convenables aux g constantes arbitraires $C_1, \ldots, C_g$.*

En conséquence, cette fonction $\upsilon(x, C_1, C_2, \ldots, C_g)$ se nomme l'*intégrale générale* de l'équation proposée.

III. *Le déterminant différentiel par rapport à $C_1, C_2, \ldots, C_g$ de l'intégrale générale et de ses $g-1$ premières dérivées par rapport à x ne s'évanouit pour aucunes valeurs de $x, C_1, C_2, \ldots, C_g$ pour lesquelles x et les valeurs correspondantes de $u, \frac{du}{dy}, \ldots, \frac{d^{g-1}u}{dx^{g-1}}$ tombent dans les limites où la composantè f est olotrope.*

IV. *On reproduit l'équation différentielle* (39) *en éliminant les constantes arbitraires de l'équation intégrale générale, c'est-à-dire en adjoignant à la première des équations* (41) *celles obtenues en la différentiant* (*par rapport à x*) 1, 2, ..., *g fois, et en portant dans la dernière les expressions de $C_1, C_2, \ldots, C_g$ tirées des g premières.*

V. *Si l'on portait seulement dans la* $(g-k+1)^{ième}$ *les*

expressions de celles des $g-k$ constantes arbitraires par rapport auxquelles on peut résoudre les $g-k$ premières équations dont il s'agit, on obtiendrait, résolue par rapport à $\frac{d^{g-k}u}{dx^{g-k}}$, une équation differentielle d'ordre $g-k$ avec k constantes arbitraires, à laquelle satisfont aussi toutes les intégrales ordinaires.

Une équation de cette espèce se nomme une *intégrale $k^{\text{ième}}$* de l'équation proposée (39). Une manipulation très simple, basée sur la méthode indiquée au n° **398**, permet d'en tirer immédiatement un groupe complet d'équations intégrales de rang k du système connexe (40).

VI. Outre ses intégrales ordinaires, l'équation (39) a quelquefois des intégrales singulières. Pour les découvrir, il faut former quelque relation

$$\omega(x, u, u', u'', \ldots, u^{(g-1)}) = 0,$$

dont tous les systèmes de solutions soient singuliers pour la fonction de g variables $f(x, u, u', \ldots, u^{(g-1)})$, puis retenir seulement parmi les intégrales de l'équation d'ordre $g-1$

$$\omega\left(x, u, \frac{du}{dx}, \ldots, \frac{d^{g-1}u}{dx^{g-1}}\right) = 0$$

celles qui par hasard satisferaient aussi à l'équation proposée.

Etc.

410. On *élimine* des fonctions entre des équations différentielles données, en en déduisant, quand on le peut, quelque autre équation, le plus souvent différentielle, qui ne contient plus les fonctions dont il s'agit, ni aucune de leurs dérivées.

Quand les équations données sont de nature et en nombre tels, qu'on puisse en éliminer les fonctions désignées et leurs dérivées comme on le ferait pour des quantités quelconques, l'opération ne diffère en rien de l'élimination dont les principes généraux ont été esquissés au n° **317**.

Quand il en est autrement, il faut essayer par des différentiations variées des équations proposées, de leur en adjoindre de nouvelles formant avec elles un système d'où il soit possible d'éli-

miner, comme nous venons de le dire, non seulement les fonctions désignées et leurs dérivées figurant avec elles dans les équations données, mais encore leurs nouvelles dérivées que les différentiations ont introduites. *Il peut donc se faire que l'élimination soit impossible;* car, en particulier, le nombre des quantités à éliminer peut croître plus rapidement que celui des équations aidant à les chasser. *Quand elle est praticable, on aperçoit immédiatement que les ordres des équations finales sont en général plus élevés que ceux des proposées.*

Cette question est si vague quand on ne descend pas des généralités, si peu embarrassantes dans les cas particuliers usuels, qu'il serait tout à fait oiseux de nous y appesantir. Nous dirons seulement qu'en général *on rend les calculs bien plus nets en exécutant l'élimination, non sur les équations données elles-mêmes, mais sur le système immédiat équivalent.*

Pour donner une idée de la manière dont les choses se passent pour un système immédiat, nous allons faire voir que *l'élimination de $g-1$ fonctions inconnues, v, w, ... par exemple, entre les équations du système ordinaire* (20) *est toujours praticable, et qu'elle conduit pour u, à une équation différentielle dont l'ordre ne peut surpasser g.*

En différentiant celle de ces équations qui a $\frac{du}{dx}$ pour premier membre, et en substituant les seconds membres de toutes, à $\frac{du}{dx}$, $\frac{dv}{dx}$, $\frac{dw}{dx}$, ... que cette opération a introduites, il vient

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial u}U + \frac{\partial U}{\partial v}V + \frac{\partial U}{\partial w}W + \ldots = {}'U(x, u, v, w, \ldots),$$

équation d'où par le même procédé on tire successivement et indéfiniment

$$\frac{d^3u}{dx^3} = {}''U(x, u, v, w, \ldots),$$

$$\frac{d^4u}{dx^4} = {}'''U(x, u, v, w, \ldots),$$

....

Cela posé, entre les k premières équations ainsi obtenues à

partir de la première du système (20) inclusivement, et k étant $\overline{\overline{<}} g$, on pourra certainement éliminer les $g - 1$ fonctions v, w, ... (**318**). Il en résultera donc bien une équation finale de la forme

$$F\left(x, u, \frac{du}{dv}, \dots, \frac{d^k u}{dx^k}\right) = 0.$$

ADDITION I.

SUR UNE PROPRIÉTÉ ESSENTIELLE DES POLYNOMES ENTIERS A UNE SEULE VARIABLE.

411. Le théorème suivant appartient à l'Algèbre pure; cependant nous l'exposerons ici, à cause de son importance et de son utilité qui nous paraissent considérables.

En appelant M *un entier positif donné, puis* $m_1, m_2, \ldots, m_g$, g *autres dont la somme est égale à* M, *puis* $x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_g$, g *quantités quelconques, deux à deux numériquement inégales, il existe toujours un mais un seul polynôme entier* $f(x)$ *de degré* M — 1, *jouissant de la propriété que pour* $x = \ldots, x_i, \ldots$ *on ait numériquement*

$$(1)\qquad \left\{\begin{array}{l} \cdots\cdots\cdots \\ f(x_i) = \mathrm{U}_i, \\ f'(x_i) = \mathrm{U}'_i, \\ \cdots\cdots\cdots \\ f^{(m_i-1)}(x_i) = \mathrm{U}_i^{(m_i-1)}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right.$$

où $\ldots, \mathrm{U}_i, \mathrm{U}'_i, \ldots, \mathrm{U}_i^{(m_i-1)}, \ldots$ *représentent* M *quantités données quelconques* [1].

La démonstration se tire habituellement de considérations empruntées à la théorie générale des équations; mais la suivante, basée sur la méthode des coefficients indéterminés, est directe, et me paraît bien préférable.

I. Pour trouver un polynôme de degré M — 1 jouissant de la

[1] Quand on a $g = \mathrm{M}$, d'où $m_1 = m_2 = \ldots = m_g = 1$, l'énoncé n'implique pas la considération des dérivées d'un polynôme; c'est aussi le seul cas dans lequel nous appliquions ce théorème avant d'avoir introduit la notion dont il s'agit.

propriété en question, il faut déterminer ses M coefficients de manière qu'ils satisfassent aux conditions (1); et celles-ci constituant entre eux un système de M équations linéaires à M inconnues, il suffit, pour faire notre démonstration, de prouver que ce système est possible et déterminé, c'est-à-dire que le déterminant des coefficients des inconnues ne peut jamais s'évanouir. Ce déterminant (d'ordre M) est évidemment un polynôme entier en $x_1, \ldots, x_g$, et nous le représenterons par

$$\Delta_{m_1, m_2, \ldots, m_g}(x_1, x_2, \ldots, x_g). \tag{2}$$

II. Quand on a $g = M$, d'où $m_1 = m_2 = \ldots = 1$, ce déterminant est

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{M-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{M-1} \\ \cdot & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_M & x_M^2 & \ldots & x_M^{M-1} \end{vmatrix}. \tag{3}$$

En retranchant simultanément les éléments de la première ligne de ceux de la seconde, puis de la troisième, etc., puis de la $M^{\text{ième}}$, le déterminant en question prend la forme

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{M-1} \\ 0 & (x_2 - x_1) & (x_2^2 - x_1^2) & \ldots & (x_2^{M-1} - x_1^{M-1}) \\ \cdot & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & (x_M - x_1) & (x_M^2 - x_1^2) & \ldots & (x_M^{M-1} - x_1^{M-1}) \end{vmatrix},$$

et se réduit par suite à celui-ci, d'ordre $M - 1$ seulement,

$$\begin{vmatrix} (x_2 - x_1) & (x_2^2 - x_1^2) & \ldots & (x_2^{M-1} - x_1^{M-1}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (x_M - x_1) & (x_M^2 - x_1^2) & \ldots & (x_M^{M-1} - x_1^{M-1}) \end{vmatrix}.$$

Ce dernier est évidemment le produit de

$$(x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\ldots(x_M - x_1)$$

par le déterminant de même ordre

$$\begin{vmatrix} 1 & (x_2 + x_1) & (x_2^2 + x_2 x_1 + x_1^2) & \ldots & (x_2^{M-2} + x_2^{M-3} x_1 + \ldots + x_1^{M-2}) \\ 1 & (x_3 + x_1) & (x_3^2 + x_3 x_1 + x_1^2) & \ldots & (x_3^{M-2} + x_3^{M-3} x_1 + \ldots + x_1^{M-2}) \\ \cdot & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & (x_M + x_1) & (x_M^2 + x_M x_1 + x_1^2) & \ldots & (x_M^{M-2} + x_M^{M-3} x_1 + \ldots + x_1^{M-2}) \end{vmatrix}.$$

En retranchant successivement dans celui-ci : 1° des éléments de la dernière colonne ceux de l'avant-dernière, multipliés par x_1; 2° de ceux de l'avant-dernière, ceux de l'antipénultième multipliés encore par x_1, ...; puis enfin de ceux de la seconde, ceux de la première, multipliés toujours par x_1, on le réduit à

$$(4) \qquad \begin{vmatrix} 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{M-2} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \dots & x_3^{M-2} \\ . & .. & .. & \dots & \dots \\ 1 & x_M & x_M^2 & \dots & x_M^{M-2} \end{vmatrix}.$$

Si donc on représente les déterminants (3) et (4) par

$$\Delta(x_1, x_2, \dots, x_M)$$

et

$$\Delta(x_2, x_3, \dots, x_M),$$

on a la formule de réduction

$$\Delta(x_1, x_2, x_3, \dots, x_M) = [(x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\dots(x_M - x_1)]\,\Delta(x_2, x_3, \dots, x_M),$$

d'où l'on conclut immédiatement

$$\Delta(x_1, x_2, \dots, x_M) = \left\{ \begin{array}{r} (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\dots(x_M - x_1) \\ \times (x_3 - x_2)\dots(x_M - x_2) \\ \times \dots\dots\dots\dots \\ \times (x_M - x_{M-1}) \end{array} \right\}.$$

Le déterminant (3) ne peut donc s'évanouir, puisqu'il se décompose ainsi en facteurs dont chacun est la différence de deux quantités que nous supposons essentiellement inégales.

III. *Quand l'un des indices, m_1 par exemple, est > 1, on a la relation*

$$(5). \qquad \left\{ \begin{array}{l} \Delta_{m_1, m_2, \dots, m_g}(x_1, x_2, \dots, x_g) \\ \quad = \left[\dfrac{d^{m_1 - 1}}{d\mathfrak{r}^{m_1 - 1}} \Delta_{m_1 - 1, 1, m_2, \dots, m_g}(x_1, \mathfrak{r}, x_2, \dots, x_g) \right]_{\mathfrak{r} = x_1}. \end{array} \right.$$

Comme dans $\Delta_{m_1, m_2, \dots, m_g}$ et $\Delta_{m_1 - 1, 1, m_2, \dots, m_g}$, toutes les lignes sont respectivement identiques et indépendantes de $\mathfrak{r}$, à l'exception de celles de rang m_1, savoir

$$1, \quad \mathfrak{r}, \quad \mathfrak{r}^2, \quad \dots, \quad \mathfrak{r}^{M-1}$$

dans le second de ces déterminants, et les valeurs pour $x = x_1$ des dérivées $(m_1 - 1)^{\text{ièmes}}$ de ces mêmes monômes dans le premier, le point en question est évident (258, V).

IV. L'emploi répété de la formule (5) permettra donc de déduire de l'expression de $\Delta_{1,1,1,\ldots,1}(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_M)$ trouvée ci-dessus (II) celle de $\Delta_{2,1,\ldots,1}$, puis de celle-ci, celle de $\Delta_{3,\ldots,1}$, et ainsi de suite pour toutes les valeurs du nombre g et des indices, qu'il y a à considérer. En exécutant ces calculs qui n'offrent aucune difficulté, on trouvera que le déterminant (2) se décompose toujours en facteurs égaux à certaines puissances des différences des quantités $x_1, x_2, \ldots, x_g$, partant non nuls, ce qui achève la démonstration de notre théorème.

412. Il a ces deux corollaires :

I. *Deux polynômes entiers en x, de même degré* M — 1, *sont égaux identiquement, quand ils le sont numériquement pour* M *valeurs inégales de x, seulement.* Car les coefficients des termes semblables dans l'un et dans l'autre sont nécessairement égaux.

II. *Un polynôme de degré* M — 1 *est identiquement nul, quand il s'évanouit numériquement pour* M *semblables valeurs de x.*

Tous ses coefficients sont effectivement égaux à ceux du polynôme de même degré $0 + 0 . x + 0 . x^2 + \ldots + 0 . x^{M-1}$, puisque les valeurs de x dont il s'agit donnent toujours la même valeur (zéro) à l'un et à l'autre.

FIN DE LA PREMIÈRE PARTIE.

TABLE DES MATIÈRES

DE LA PREMIÈRE PARTIE.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES DE LA PREMIERE PARTIE.

18652 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS ET FILS, quai des Grands-Augustins, 55.

